Chapitre 8 : Formules de Taylor et développements limités

(cours)

1 Contenu du cours

1.1 Formule de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois dérivable dans $[a, b]$, $n+1$ dans $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

preuve : poser A tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

puis $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A$$

appliquer Rolle à φ

1.2 Formule de Taylor-Young

Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I et $n+1$ fois dérivable en a. Alors, il existe une fonction $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $h(a) = 0$ et continue en a, avec, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} (f^{(n+1)}(a) + h(x)).$$

Preuve
Soit $x \in I$ avec $x > a$ (le cas $x < a$ se traite de manière analogue). On pose $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(t) = f(t) - f(a) - (t-a)f'(a) - \ldots - \frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!} A,$$

avec $A \in \mathbb{R}$ choisi pour que $\psi(x) = 0$. Comme $\psi(a) = 0$ et que ψ est dérivable, on applique le théorème de Rolle. Il existe donc $x_1 \in]0, x[$ tel que $\psi'(x_1) = 0$. Or, pour tout $t \in I$,

$$\psi'(t) = f'(t) - f'(a) - (t-a)f''(a) - \ldots - \frac{(t-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a) - \frac{(t-a)^n}{n!} A.$$

On a alors $\psi'(x_1) = 0$ et $\psi'(a) = 0$, donc, en appliquant le théorème de Rolle, on trouve l'existence de $x_2 \in]0, x_1[$ tel que $\psi''(x_2) = 0$. En répétant ce procédé jusqu'à l'ordre n, on construit ainsi $0 < x_n < x_{n-1} \ldots < x_2 < x_1 < x$ tels que $\psi^{(i)}(x_i) = 0$. On a alors, pour $i = n$,

$$\psi^{(n)}(x_n) = f^{(n)}(x_n) - f^{(n)}(a) - (x_n - a)A.$$

Or, par hypothèse, $f^{(n)}$ est dérivable en a, donc il existe une fonction $h_1 \; : I \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que $h_1(a) = 0$ et continue en a, avec, pour tout $x \in I$,

$$f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a) = (x-a)(f^{(n+1)}(a) + h_1(x)).$$

Ceci montre que $A = f^{(n+1)}(a) + h_1(x_n)$. Comme $0 < x_n < x$, la fonction $h \; : I \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $h(x) = h_1(x_n)$ et $h(a) = 0$, vérifie donc h continue en a, ce qui prouve le théorème.

2 Développements limités

2.1 Définition

propriétés, unicité, relation avec Taylor-Young et équivalents

2.2 Opérations sur les développements limités

somme produit inverse quotient composition

2.3 Intégration des développements limités et dérivation

si f est continue et dérivable au voisinage de a, et si

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + (x-a)^n h_a(x)$$

alors

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} g_a(x)$$

avec $\lim_{x \to a} g_a(x) = 0$

preuve : par th accroissements finis sur la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}$$

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(c)$$

et $\varphi'(c) = (c-a)^n h_a(c)$ Donc si on définit g_a par

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} g_a(x)$$

on a

$$|g_a(x)| \leq |\frac{(c-a)^n}{(x-a)^n}| h_a(c)$$

donc tend vers 0.

3 Exercices

3.1 Développements limités de la fonction arctan

Donner le développement à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $f\ :]-\infty,1[\longrightarrow \mathbb{R},\ x\mapsto \arctan\frac{1}{1-x}$.

3.2 Développements limités de polynomes

Donner le développement à l'ordre 7 au voisinage de -1 de la fonction $x\mapsto x^4-1$.

3.3 Développements limités pour les calculs de limite

Etudier la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.

3.4 Développements limités et valeurs absolues

i) Etudier la fonction $g\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ 0\mapsto 0$ et $x\mapsto \exp(-\frac{1}{|x|})$ pour $x\neq 0$.
ii) Montrer l'existence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, d'un développement limité d'ordre n de la fonction g au voisinage de 0. Donner ce développement limité.

3.5 Développements limités et fonctions trigonométriques

Donner un développement limité à l'ordre 8 de $\sqrt{1+\sin^3 x}$.

3.6 Limites et DL

Etudier la limite de la suite $\left(1+\dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$, où $\alpha>0$ est donné.

3.7 Limites et DL

i) Soit la fonction $f\ :\mathbb{R}_*^+\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}}$. Montrer que f possède une limite L en 0.
ii) On prolonge f par $f(0)=L$. Donner un développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

3.8 Fonctions hyperboliques

i) Soit la fonction $f\ :\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto e^{-x}\mathrm{ch}\sqrt{x^2+1}$. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3.9 Développements et dérivées nièmes

On pose $g\ :\mathbb{R}+_*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto\sin x,\ h\ :\mathbb{R}+_*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto\cos x,\ G\ :\mathbb{R}+_*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{ch}\ x$, $H\ :\mathbb{R}+_*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto \mathrm{sh}\ x,\ f\ :\mathbb{R}+_*\longrightarrow\mathbb{R},\ x\mapsto x^2+1$.
i) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g^{(n)}(x)=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$ et $h^{(n)}(x)=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$.
ii) Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $G^{(n)}(x)$ et $H^{(n)}(x)$.
iii) Calculer, àide de la formule de Leibniz, pour tout $n\in\mathbb{N}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(fg)^{(n)}(x)$, $(fh)^{(n)}(x)$, $(fG)^{(n)}(x)$ et $(fH)^{(n)}(x)$.

3.10 Encadrements fins

Montrer que, pour tout $x\in[0,\pi]$,

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}\leq\sin x\leq x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

3.11 Limites et DL

Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier, selon la valeur de a, la limite de la suite de terme général $(n^2+1)^a - (n^2-1)^a$.

3.12 Limites et DL

Soit $a \in \mathbb{R}$. Etudier la limite de la suite de terme général $(n \sin \frac{1}{n})^{(n^2)}$.

3.13 DL de fonctions réciproques

Montrer que la fonction $f \ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + \sin x$ est une bijection continue et dérivable admettant une fonction réciproque continue et dérivable. Donner le développement limité à l'ordre 3 de f^{-1} au voisinage de 0.

4 Correction d'exercices

Dans tout le texte, les fonctions $h_i(x)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 quand x tend vers 0

Correction de l'exercice 3.1

On trouve que $f(0) = \frac{\pi}{4}$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \frac{1}{2}$. Donc par formule de Taylor-Young

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + x^3 h(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$.

Correction de l'exercice 3.2

On a

$$x^4 - 1 = ((x+1)-1)^4 - 1 = -4(x+1) + 6(x+1)^2 - 6(x+1)^3 + (x+1)^4,$$

qui est le développement limité de $x \mapsto x^4 - 1$ à tout ordre supérieur ou égal à 4.
Remarque : la formule de Taylor-Lagrange formalise la formule de Taylor-Mac Laurin, qui montrait justement que pour tout polynome P de degré n, on a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} P^{(k)}(a)$$

(le reste est nul au delà du degré n).

Correction de l'exercice 3.3

On a le développement limité de la fonction e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2(1 + h_2(x)).$$

Cela montre que $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3.4

Rappel d'un exercice plus ancien. On donnait f, une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = e^{1/t}$ si $t < 0$ $f(t) = 0$ si $t \geq 0$. On montrait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$. On montrait ensuite l'existence de $f''(0)$ et $f''(0) = 0$. On montrait par récurrence sur n que pour tout $t < 0$, $f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$ où $P_n(t)$ est un polynome dont on précisait le degré. On montrait alors que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cet exercice permet donc de montrer que la fonction paire g, qui est telle que $\forall x \in \mathbb{R}^-, g(x) = f(x)$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) = f(-x)$, est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$. On a le tableau de variations suivant (on étudie g seulement sur $]-\infty, 0]$ et on complète par parité) :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0
$g'(x)$		$-$		$-$	0
$g(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$	$\searrow$	0

(il y a donc deux points d'inflexion, pour $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$, et 0 n'est pas un point d'inflexion car bien que $g''(0) = 0$, cette fonction reste positive ou nulle sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.)
ii) Comme toutes les dérivées de g en 0 valent 0, le développement limité de g au voisinage de 0 est donc

$$g(x) = x^n h_n(x),$$

ce développement limité étant réduit à son reste. On a donc un exemple de développement limité autour d'un point a donc la partie polynomiale ne tend pas vers la fonction en dehors du point a (contrairement aux fonctions sinus, cosinus, exponentielle par exemple).

Correction de l'exercice 3.5

Si l'on utilise un peu de trigonométrie, on trouve que

$$\sin^3 x = \frac{\sin(3x) - 3\sin x}{4}.$$

On trouve donc

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13\, x^7}{240} + x^8 h_1(x).$$

Comme il existe un réel a_3 tel que

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + y^3(a_3 + h_3(y)),$$

on en déduit, en se limitant au calcul des termes de degré inférieur ou égal à 8,

$$\sqrt{1 + \sin^3 x} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{4} - \frac{x^6}{8} + \frac{13x^7}{240} + \frac{x^8}{8} + x^8 h_8(x).$$

Correction de l'exercice 3.6

On a

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)\right),$$

donc, avec un équivalent de ln,

$$\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = \exp\left(n^{1-\alpha}(1+h_0(x))\right).$$

On a donc

$$\forall \alpha > 1, \lim_n \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = 1,$$

$$\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

et

$$\forall \alpha \in]0,1[, \lim_n \left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)^n = +\infty.$$

Correction de l'exercice 3.7

i) On a $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{4} + x^3 h_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0} h_1(x) = 0$. Donc f possède une limite L en 0 avec $L = 1$.
ii) On a, pour tout $y \in]0,2[$,

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + y^3 h_2(y),$$

avec $\lim\limits_{y\to 0} h_2(y) = 0$.
On pose $y = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + x^3 h_1(x)$. On trouve alors $y^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + x^3 h_2(x)$ et $y^3 = -\frac{x^3}{8} + x^3 h_3(x)$. Donc

$$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1 - \frac{x}{4} + x^2(\frac{1}{6} - \frac{1}{32}) + x^3(-\frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8\,16}) + x^3 h_4(x),$$

donc

$$\sqrt{\frac{\ln(1+x)}{x}} = 1 - \frac{x}{4} + \frac{13x^2}{96} - \frac{35x^3}{184} + x^3 h_4(x).$$

Correction de l'exercice 3.8

On ne peut pas trouver cette limite en n'étudiant que les équivalents ! il faut multiplier $\sqrt{x^2+1}-x$ par le binome conjugué. On trouve alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3.9

i) preuve par récurrence pour g, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin' x = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$. On remarque ensuite que $h = g'$, ce qui permet de déduire la seconde relation.
ii) On a $G^{(n)}(x) = \dfrac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$ et $H^{(n)}(x) = \dfrac{e^x - (-1)^n e^{-x}}{2}$.
iii) seules f, f' et f'' sont non nulles, donc, pour $n \geq 2$, $(fg)^{(n)}(x) = (x^2+1)\sin(x+\dfrac{n\pi}{2}) + 2nx\sin(x+\dfrac{(n-1)\pi}{2}) + n(n-1)\sin(x+\dfrac{(n-2)\pi}{2})$. On obtient les autres expressions selon le même principe.

Correction de l'exercice 3.10

Le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 6 au voisinage de 0 de sin conduit au reste $-\frac{x^6}{6!}\sin c$, avec $0 < c < x$, donc reste négatif. Le développement de Taylor-Lagrange à l'ordre 8 au voisinage de 0 de sin conduit au reste $\frac{x^8}{8!}\sin d$, avec $0 < d < x$, donc reste positif. Les deux inégalités en découlent.

Correction de l'exercice 3.11

Pour $a \leq 0$, on a $\lim_n (n^2+1)^a - (n^2-1)^a = 0$. Supposons $a > 0$. On a

$$(n^2+1)^a - (n^2-1)^a = n^{2a}((1+\frac{1}{n^2})^a - (1-\frac{1}{n^2})^a).$$

On considère la fonction f donnée par $f(x) = ((1+x)^a - (1-x)^a$. Un développement limité au voisinage de 0 donne $f(x) = 2ax + xh(x)$, avec h tendant vers 0 quand x tend vers 0.
Donc

$$(n^2+1)^a - (n^2-1)^a = n^{2a-2}(2a + h(\frac{1}{n^2})),$$

ce qui prouve $\lim_n (n^2+1)^a - (n^2-1)^a = 0$ si $a \in]0,1[$, $\lim_n (n^2+1)^a - (n^2-1)^a = +\infty$ si $a \in]1,+\infty[$. On trouve par ailleurs que $(n^2+1)^1 - (n^2-1)^1 = 2$, qui est donc la limite de cette suite constante.

Correction de l'exercice 3.12

On a

$$(n \sin\frac{1}{n})^{(n^2)} = \exp(n^2 \ln(n \sin\frac{1}{n})).$$

On a de plus $\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3}h(\frac{1}{n})$, donc $\ln(n\sin\frac{1}{n}) = \ln(1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2}h(\frac{1}{n})) = -\frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2}h_1(\frac{1}{n})$, donc

$$(n \sin\frac{1}{n})^{(n^2)} = \exp(-\frac{1}{6} + h_1(\frac{1}{n}))$$

converge donc vers $e^{-1/6}$.

Correction de l'exercice 3.13

Puisque f' est strictement positif et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, f est donc une bijection continue et dérivable admettant une fonction réciproque continue et dérivable. On a alors, en posant $y = f(x)$,

$$y = 3x - \frac{x^3}{6} + x^3 h(x),$$

ce qui conduit, en remarquant que $x = \frac{y}{3} + h_1(y)$, à

$$y = 3x - \frac{x^3}{6} + y^3 h_2(y),$$

et

$$y^3 = 27x^3 + y^3 h_3(y).$$

On obtient ainsi x^3, puis x en fonction de y, ce qui donne

$$x = \frac{y}{3} + \frac{y^3}{486} + y^3 h_4(y).$$