SVM 201
COURBES PLANES

Alain Yves LE ROUX

1 Les arcs paramétrés, les arcs géométriques en coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, un arc paramétré du plan est la donnée d'un intervalle réel I et d'une application $F = (f, g)$ définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (le plan). Cet arc paramétré est noté (I, F) et chaque fonction (composante) f ou g est une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, nous supposerons f et g suffisamment régulières (par exemple deux fois continuement dérivables).

Si $I = [a, b]$, intervalle fermé borné, les points $F(a)$ et $F(b)$ sont appelés les extrémités de l'arc paramétré (I, F).

L'image $\Gamma = F(I)$ est appelée le support de l'arc paramétré (I, F).

On considère maintenant un arc paramétré (I, F) et un intervalle réel J. Soit h une bijection définie sur J, à valeurs dans I. On pose $H = F \circ h$. Alors (J, H) correspond à un arc paramétré, qui a le même support que (I, F). On dit que ces deux arcs (I, F) et $5J, H)$ sont équivalents, et leur support commun $\Gamma = F(I) = H(J)$ est appelé arc géométrique.

Lorsque l'application F définie sur $I = [a, b]$ et à valeurs dans $\Gamma = F(I)$ est injective, on dit que (I, F) est un arc simple. Etant donné un arc simple, on peut concevoir deux orientations possibles : en notant A et B les extrémités de Γ, on a soit $A = F(a)$ (et donc $B = F(b)$), soit $A = F(b)$ (et donc $B = F(a)$).

Par exemple les deux arcs paramétrés (I, F) avec $I =]0, \pi[$, $F(t) = (cost, sint)$, et (J, H) avec $J = \mathbb{R}$, $H(t) = (\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}})$ représentent le même arc géométrique, avec des orientations differentes.

2 Etude locale d'un arc paramétré

Soit Γ un arc géométrique, et (I, F) un arc paramétré correspondant à ce support. On suppose que les composantes de F, notée f et g sont deux fois dérivables sur I. Soit $M_0 \in \Gamma$, et $t_0 \in I$ tel que M_0 coïncide avec $F(t_0)$. Les coordonnées de M_0 sont donc $x_0 = f(t_0)$ et $y_0 = g(t_0)$.

Le point M_0 est appelé point régulier lorsque

$$(f'(t_0), g'(t_0)) \neq (0, 0) . \tag{2.1}$$

Typeset by the $\TeX$-preprocessor PreTEX

Ceci signifie que $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne sont pas nuls simultanément ; si $f'(t_0) = 0$, alors $g'(t_0) \neq 0$, et si $g'(t_0) = 0$, alors $f'(t_0) \neq 0$.

2.1 Approximation par une droite passant par M_0 : la tangente

On cherche, parmi toute les droites passant par M_0, donc d'équation

$$y - y_0 \;=\; \alpha\,(x - x_0)\;, \tag{2.2}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ à déterminer, celle qui est la plus proche de la courbe, au sens suivant : si (x, y) est un point de Γ, alors (x, y) vérifie (2.2) au premier ordre. Ceci revient à dire que l'on a un développement limité de la forme suivante, où $x = f(t)$, $y = g(t)$,

$$g(t) \;-\; y_0 \;=\; \alpha\,(f(t) - x_0) \;+\; (t - t_0)\,\epsilon(t - t_0)\;,$$

où $\epsilon(t - t_0) \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow t_0$. En introduisant les développements limités

$$\begin{aligned} g(t) \;&=\; g(t_0) \;+\; (t - t_0\, g'(t_0) \;+\; (t - t_0)\,\epsilon_1(t - t_0) \\ f(t) \;&=\; f(t_0) \;+\; (t - t_0) f'(t_0) \;+\; (t - t_0)\,\epsilon_2(t - t_0) \end{aligned}$$

il vient, après simplification et passage à la limite lorsque $t \longrightarrow t_0$,

$$\alpha\, f'(t_0) \;=\; g'(t_0) \tag{2.3}$$

Si $f'(t_0) \neq 0$, on peut définir $\alpha = \dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$, et la droite attendue est bien déterminée par l'équation (2.2). Si $f'(t_0) = 0$ alors la droite est d'équation $x = x_0$. On peut réunir toutes ces éventualités en écrivant l'équation de cette droite sous la forme

$$f'(t_0)\,(y - y_0) \;=\; g'(t_0)\,(x - x_0)\;. \tag{2.4}$$

Il s'agit de la droite tangente à la courbe en M_0. Lorsque $f'(t_0) = 0$, cette tangente est verticale (c'est à dire parallèle à la direction $(0, 1)$). Lorsque $g'(t_0) = 0$, cette tangente est horizontale (c'est à dire parallèle à la direction $(1, 0)$.

2.2 Approximation par un cercle passant par M_0 : la courbure

On cherche à approcher la courbe par un cercle passant par M_0. Le cercle a une équation de la forme

$$(x - c)^2 \;+\; (y - d)^2 \;=\; R^2\;, \tag{2.5}$$

où (c, d) correspond au centre du cercle et R est son rayon. On cherche ces paramètres, c, d et R de telle façon que le cercle approche la courbe à l'ordre 2. On aura donc

$$(f(t) - c)^2 \;+\; (g(t) - d)^2 \;=\; R^2 \;+\; (t - t_0)^2\,\epsilon(t - t_0), \tag{2.6}$$

où $\epsilon(t - t_0) \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow t_0$. On introduit dans (2.6) les développements limités

$$\begin{aligned} g(t) \;&=\; g(t_0) \;+\; (t - t_0) g'(t_0) \;+\; \tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 g''(t_0) \;+\; (t - t_0)^2\,\epsilon_1(t - t_0) \\ f(t) \;&=\; f(t_0) \;+\; (t - t_0) f'(t_0) \;+\; \tfrac{1}{2}(t - t_0)^2 f''(t_0) \;+\; (t - t_0)^2\,\epsilon_2(t - t_0) \end{aligned}$$

pour obtenir une expression de la forme

$$\begin{array}{c}(x_0-c)^2+(y_0-d)^2-R^2 \ + \ 2(t-t_0)((x_0-c)f'(t_0)+(y_0-d)g'(t_0)) \\ +(t-t_0)^2(f'(t_0)^2+g'(t_0)^2+(x_0-c)f''(t_0)+(y_0-d)g''(t_0)) \ = \ (t-t_0)^2\eta(t-t_0)\end{array} \tag{2.7}$$

où $\eta(t-t_0) \longrightarrow 0$ si $t \longrightarrow t_0$.

On fait $t = t_0$ dans (2.7). Il vient

$$(x_0-c)^2 \ + \ (y_0-d)^2 \ = \ R^2 \,, \tag{2.8}$$

qui exprime que le cercle passe par M_0. L'expression (2.7) se réduit donc à (après simplification par $(t-t_0)$)

$$\begin{array}{c}2\ ((x_0-c)f'(t_0)+(y_0-d)g'(t_0)) \ + \\ +(t-t_0)(f'(t_0)^2+g'(t_0)^2+(x_0-c)f''(t_0)+(y_0-d)g''(t_0)) \ = \ (t-t_0)\eta(t-t_0)\end{array}$$

et en faisant $t = t_0$, il vient

$$2((x_0-c)f'(t_0)+(y_0-d)g'(t_0)) \ = \ 0 \,. \tag{2.9}$$

Finalement, (2.7) se réduit à

$$(x_0-c)f''(t_0) \ + \ (y_0-d)g''(t_0) \ + \ f'(t_0)^2+g'(t_0)^2 \ = \ 0 \,. \tag{2.10}$$

Les équations (2.9) et (2.10) constituent un système linéaire, et sa résolution donne

$$\begin{array}{rcl} c & = & x_0 \ - \ \frac{K(t_0)^2}{\Delta(t_0)}\ g'(t_0) \\ d & = & y_0 \ + \ \frac{K(t_0)^2}{\Delta(t_0)}\ f'(t_0)\end{array} \tag{2.11}$$

où on a posé

$$K(t_0) \ = \ \sqrt{f'(t_0)^2+g'(t_0)^2}\ , \ \ \Delta(t_0) \ = \ g''(t_0)f'(t_0)-f''(t_0)g'(t_0). \tag{2.12}$$

On en déduit la valeur de R en reportant dans (2.5), c'est à dire

$$R \ = \ \frac{K(t_0)^3}{|\Delta|} \,. \tag{2.13}$$

La quantité R est appelée rayon de courbure, et le point (c, d) est le centre de courbure. Lorsque $\Delta = 0$ on ne peut pas définir ces quantités ; le rayon de courbure est infini. C'est par exemple le cas pour un point d'inflexion, lorsque la courbe traverse sa tangente. Dans ce cas, la quantité

$$(g(t) \ - \ y_0)\ f'(t_0) \ - \ (\ f(t) \ - \ x_0)\ g'(t_0)$$

change de signe lorsque t passe la valeur t_0.

3 Etude des branches infinies

On suppose que I est de la forme $I = [a, b[$, et $t_0 = b$ est tel que soit $f(t)$, soit $g(t)$ (soit les deux) devient infini ($\pm\infty$) lorsque $t \longrightarrow t_0$.

Si $f(t) \longrightarrow \pm\infty$, et $g(t)$ tend vers une limite y_0, il y a une asymptote horizontale d'équation $y = y_0$, approchée pour les $x > 0$ si $f(t) \longrightarrow +\infty$, pour les $x < 0$ si $f(t) \longrightarrow -\infty$.

Si $g(t) \longrightarrow \pm\infty$, et $f(t)$ tend vers une limite x_0, il y a une asymptote verticale d'équation $x = x_0$, approchée pour les $y > 0$ si $g(t) \longrightarrow +\infty$, pour les $y < 0$ si $g(t) \longrightarrow -\infty$.

Si $f(t)$ et $g(t)$ tendent tous les deux vers $\pm\infty$, et

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{g(t)}{f(t)} = \alpha \quad \text{existe} ,$$

on cherche une asymptote d'équation $y = \alpha x + \beta$. Si

$$\lim_{t \longrightarrow t_0} (g(t) - \alpha f(t)) = \beta \text{ existe} ,$$

cette asymptote existe effectivement.

Si au contraire cette limite est infinie, on est en présence d'une branche parabolique, de direction asymptotique α. Si de plus α est infini, on est en présence d'une branche parabolique verticale.

4 Les coordonnées polaires

Soit φ une fonction définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à une représentation paramétrique de la forme

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \varphi(\theta)\, cos\theta \\ y(\theta) &= \varphi(\theta)\, sin\theta \end{aligned} \tag{4.1}$$

En posant $r = \sqrt{x(\theta)^2 + y(\theta)^2}$, on obtient l'équation $r = \left|\varphi(\theta)\right|$.

Par extension, on appelle représentation polaire d'une courbe, la donnée d'un intervalle réel I et d'une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$, puis de l'équation $r = \varphi(\theta)$ (il n'y a plus de valeurs absolues). Ceci permet toujours d'utiliser (4.1) pour définir les points $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ de la courbe, même si $\varphi(\theta)$ prend des valeurs négatives. La droite d'équation $y = x\ tan(\theta)$ est l'axe polaire, d'angle polaire θ. Le point $M(\theta)$ de coordonnées $x(\theta)$ et $y(\theta)$ est toujours situé sur cet axe polaire.

L'étude locale peut se ramener à l'étude précédente, en prenant $f(\theta) = \varphi(\theta) cos\theta$, et $g(\theta) = \varphi(\theta) sin\theta$. On peut cependant ajouter quelques remarques particulieres dans ce cas.

Si $\left|\varphi(\theta)\right| \longrightarrow +\infty$ lorsque $\theta \longrightarrow \pm\infty$, on est en présence d'une spirale.

Si $\varphi(\theta) \longrightarrow 0$ lorsque $\theta \longrightarrow \pm\infty$, le pôle $O = (0, 0)$ est un point asymptotique.

Si $\varphi(\theta) \longrightarrow \pm\infty$ lorsque $\theta \longrightarrow \theta_0$ (θ_0 fini), la direction $\alpha = tan(\theta_0)$ est une direction asymptotique.

Si $\varphi'(\theta_0) = 0$, la courbe admet au point $M(\theta_0)$ une tangente orthogonale à l'axe polaire d'angle polaire θ_0. Ceci se déduit immédiatement de (2.4).