SVM 201
Eléments d'Algèbre Linéaire dans $\mathbb{R}^3$

Alain Yves LE ROUX

1 Espaces Vectoriels sur $\mathbb{R}$

Soit E un ensemble muni d'une structure de groupe additif commutatif, et sur lequel on a défini une opération (dite externe) de multiplication par un réel (appelé aussi scalaire). Les éléments de E sont appelés des vecteurs. Nécessairement, E contient 0, l'élément neutre de l'addition. Si E est réduit à un seul élément (donc $E = \{0\}$), il est de dimension nulle et n'a aucun intérêt pratique.

Soit $a \in E,\ a \neq 0$. Alors l'ensemble $E_a = \{v \in E |\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ v = \lambda a\}$ est un sous espace vectoriel de dimension un de E. Il s'agit du sous espace vectoriel généré par le vecteur a.

Soit n un entier, et $a_1, a_2, ..a_n$ n vecteurs de E tels que

$$Si\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0\ ,\ alors\ \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0\ . \tag{1.1}$$

On dit que les vecteurs $a_1, a_2, ..., a_n$ constituent un système libre de vecteurs. Dans le cas contraire, ils sont dits liés et on peut trouver $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0$. Si le système $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ est libre, l'ensemble

$$E_S\ =\ \{v \in E\ |\ \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}\ \ v = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n\ \} \tag{1.2}$$

est un sous espace vectoriel de E, de dimension n. Il s'agit du sous espace généré par les vecteurs $a_j,\ j = 1..n$.

L'espace E est lui même de dimension n s'il peut être généré par un système libre constitué d'exactement n vecteurs. Dans ce cas, tout système libre de n vecteurs est appelé une base de E.

Soit $e_1, e_2, .., e_n$ une base de E, espace vectoriel de dimension n, et $v \in E$. Alors il existe n réels $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ tels que $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$. Les réels λ_j ainsi définis le sont de façon unique, et sont appelés les composantes de v sur la base $e_1, e_2, ..., e_n$. Le vecteur E est caractérisé par ses coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_n)$ sur une base fixée. On pourra ainsi identifier v à son vecteur (ligne) de coordonnées $(\lambda_1, \lambda_2, ..\lambda_n)$ sous réserve que la base ait été bien précisée. En particulier e_1 s'identifie à $(1, 0, ..., 0),\ e_2$ à $(0, 1, 0, .., 0)$, etc.., e_n à $(0, 0, ..., 0, 1)$.

L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est bien un espace vectoriel, et on peut en construire une base évidente, dite base canonique : $e_1 = (1, 0, ..., 0),\ e_2 = (0, 1, 0, .., 0),$ etc.., $e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$.

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

2 Un exemple concret

Je vais au marché et j'achète des pommes de terre, des carottes et des tomates, en se limitant à ces trois produits (espace de dimension 3). A mon retour, mon panier contient $x\ kg$ de pommes de terre, $y\ kg$ de carottes et $z\ kg$ de tomates ; je peux assimiler mon panier à un vecteur v de composantes (x, y, z) sur la base $e_1 = \{1kg$ de pommes de terre$\}$, $e_2 = \{1kg$ de carottes$\}$ $e_3 = \{1kg$ de tomates$\}$. On peut ainsi écrire

$$v \ = \ xe_1 \ + \ ye_2 \ + \ ze_3 \, .$$

Je décide de peser le contenu du panier ; j'obtiens le poids

$$p \ = \ x \ + \ y \ + \ z \, . \tag{2.1}$$

Je pèse ensuite tous les légumes rouges (carottes, tomates), et j'obtiens le poids

$$q \ = \ y \ + \ z \ \ , \tag{2.2}$$

et ensuite tous les légumes ronds (pommes de terre et tomates), pour obtenir le poids

$$r \ = \ x \ + \ z \, . \tag{2.3}$$

Ayant les valeurs de p, q et r, on peut en déduire celles de x, y et z. En effet,

$$\begin{aligned} x \ &= \ p \ - \ q \, , \\ y \ &= \ p \ - \ r \, , \\ z \ &= \ -p \ + \ q \ + \ r \, . \end{aligned} \tag{2.4}$$

On vient d'exprimer le vecteur v dans une nouvelle base, constituée des vecteurs $f_1 = \{1kg$ de légumes$\}$, $f_2 = \{1kg$ de légumes rouges$\}$, $f_3 = \{1kg$ de légumes ronds$\}$. On vient en fait de réaliser un changement de base, et dans cette nouvelle base, le contenu du panier est représenté par la formule

$$v \ = \ pf_1 \ + \ q\, f_2 \ + \ r\, f_3 \, . \tag{2.5}$$

Les f_j sont aussi des vecteurs, et on doit pouvoir les représenter sur la base e_1, e_2, e_3. On a effectivement

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = (p-q)e_1 + (p-r)e_2 + (-p+q+r)e_3 \, ,$$

donc

$$v \ = \ p(e_1 + e_2 - e_3) \ + \ q(-e_1 + e_3) \ + \ r(-e_2 + e_3) \, .$$

On en déduit

$$f_1 \ = \ e_1 + e_2 - e_3 \ , \ \ f_2 \ = \ -e_1 + e_3 \ , \ \ f_3 \ = \ -e_2 + e_3 \ , \tag{2.6}$$

et aussi

$$e_1 \ = \ f_1 + f_3 \ , \ \ e_2 \ = \ f_1 + f_2 \ , \ \ e_3 \ = \ f_1 + f_2 + f_3 \, . \tag{2.7}$$

Les relations (2.1) (2.2) (2.3) permettent de passer des composantes x, y, z aux composantes p, q, r, les relations (2.4) permettent l'opération inverse. Aux niveau des bases, les relations (2.6) permettent de passer de la base $\{e_j\}$ à la base $\{f_i\}$, et les relations (2.7) permettent de faire l'opération inverse. Toutes ces relations peuvent être représentées par des tableaux de coéfficients : des matrices.

3 Les matrices 3×3

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$, et u un vecteur de $\mathbb{R}^3$. On note x_1, x_2, x_3 les composantes de u sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, c'est à dire qu'on peut écrire $u = x_1e_1 + x_3e_2 + x_3e_3$. Remarquons bien que les x_j sont des nombres réels (scalaires), tandis que les e_j sont des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On considére maintenant une transformation linéaire A opérant sur $\mathbb{R}^3$. L'application de cette transformation A au vecteur u donne un nouveau vecteur v, dont les composantes sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sont notées y_1, y_2, y_3, c'est à dire que l'on peut écrire $v = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$. La transformation A étant linéaire, les y_k dépendent linéairement des x_j, ce qu'on peut représenter par 9 nombres a_{kj} pour $k = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$ et écrire, au niveau des composantes,

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ , \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ , \\ y_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

On peut également écrire cette transformation des composantes de façon plus compacte :

$$y_k = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}x_j \ , \tag{3.2}$$

ou encore sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} , \tag{3.3}$$

ou encore sous forme vectorielle $v = Au$. Les coéfficients a_{kj} sont les composantes de la matrice A dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. La formule (3.3) fait apparaitre un produit de composition d'une matrice par un vecteur, lui même représenté sous la forme d'une matrice colonne (on dit abusivement "vecteur colonne"). La règle du produit est celle qui fait coïncider les formules (3.1) et (3.3), et revient à multiplier, composante par composante, la $k - ième$ ligne de la matrice A par le vecteur colonne, pour obtenir la $k - ième$ composante du résultat.

On considère maintenant une autre matrice B, de composantes b_{ik} dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, que l'on applique à v pour obtenir un nouveau vecteur w, dont on notera z_1, z_2, z_3 les composantes dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. On aura, pour chaque valeur de i

$$z_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik}\, y_k \ , \tag{3.4}$$

et en tenant compte de (3.2), on obtient succèssivement

$$z_i = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{kj}\, x_j \right) = \sum_{j=1}^{3} \left(\sum_{k=1}^{3} b_{ik}a_{kj} \right) x_j = \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\, x_j \ , \tag{3.5}$$

en posant

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} b_{ik}\, a_{kj} \ . \tag{3.6}$$

On a ainsi construit une nouvelle matrice C, de composantes c_{ij}, toujours dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, qui est correspond à la composition des transformations A (d'abord) et B (ensuite), et que l'on note

$$C = B\,A\,. \tag{3.7}$$

Il s'agit du produit des matrices B et A, dont la règle de calcul est la suivante : la composante (i, j) du résultat est égale au produit de la ligne n ° i de B par la colonne n ° j de A. Ce produit n'a aucune raison d'être commutatif, exactement comme la loi de composition des fonctions.

4 Exemples de matrices

On pose

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

et on note I la matrice de composantes δ_{ij} dans une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ fixée. On a

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^3$ et $v = Iu$; alors,en notant u_j les composantes de u et v_i les composantes de v dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, on a $v_i = \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} u_j = u_i$, c'est à dire $v = u$. La matrice I représente la transformation linéaire "identité". Il s'agit de la matrice identité.

Soit A une matrice dont les composantes dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sont notées a_{ij}. Le produit $C = AI$ a pour composantes

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\,\delta_{kj} = a_{ij}\,,$$

et donc $C = A$. De même, $B = IA$ a pour composantes $b_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} a_{kj} = a_{ij}$, et en fait $B = A$. On a obtenu pour toute matrice A, $AI = IA = A$, et I est l'élément neutre pour le produit de matrices.

Dans l'exemple de la section 2, le passage des variables x, y, z aux variables p, q, r est représenté par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et le passage des variables p, q, r aux variables x, y, z par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate, en évaluant les produits AB et BA, que $AB = BA = I$. Ceci est bien prévisible : par A on passe des variables x, y, z aux variables p, q, r, et on revient aux variables x, y, z par la matrice B. Le produit BA correspond à la composition des deux opérations, ce qui revient à ne rien modifier et conserver les mêmes quantités. La matrice B est la matrice inverse de A, et on note $B = A^{-1}$, et la matrice A est la ¡matrice inverse de B : $A = B^{-1}$.

Considérons maintenant l'ensemble E des polynomes de degré inférieur ou égal à deux. Il s'agit des polynomes de la forme $p(x) = a + bx + cx^2$, et E est un espace vectoriel de dimension 3. Sur la base $\{1, x, x^2\}$, les coéfficients a, b, c corespondent aux composantes de p. A chaque polynome $p \in E$, on fait correspondre la fonction q définie sur $\mathbb{R}$ par

$$q(x) \; = \; \int_0^1 \; (x-y)^2 \, p(y) \; dy \; . \tag{4.3}$$

On remarque que

$$q(x) \; = \; \int_0^1 \; y^2 p(y) dy \; + \; x \int_0^1 (-2y) p(y) dy \; + \; x^2 \int_0^1 p(y) dy \; ,$$

et que q est un polynome de degré ≤ 3, donc $q \in E$. La transformation (4.3) qui permet de passer de p à q est une transformation linéaire, et sur la base $\{1, x, x^2\}$, on peut la représenter par une matrice A. On note $p(y) = a + by + cy^2$ et $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$. On obtient, sachant que $\displaystyle\int_0^1 y^m dy = \frac{1}{m+1}$,

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 \; = \; (\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}) \; - \; 2x \, (\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4}) \; + \; x^2 \, (a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3}) \tag{4.4}$$

d'où la matrice

$$A \; = \; \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{-2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

5 Les changements de base

Dans l'exemple de la section 2, le passage de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ à la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ correspond également à une matrice que l'on note B', donnée par

$$B' \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et le passage de la base $\{f_1, f_2, f_3\}$ à la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ correspond lui aussi à une matrice que l'on note A', donnée par

$$A' \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On constale que A' et B' sont inverses l'une de l'autre, et que B' correspond aux mêmes coéfficients que B, en échangeant les lignes et les colonnes. On dit que B' est la transposée de B. De la même façon, on remarque que A' et A sont transposées l'une de l'autre.

Lorsqu'une matrice C est égale à sa transposée, on dit qu'elle est symétrique ; on a dans ce cas $c_{ij} = c_{ji}$ pour tout i, j.

Dans le cas général, on considère un espace vectoriel E de dimension 3, et deux bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ et $\{f_1, f_2, f_3\}$ de cet espace. Soit $v \in E$; on note x_i ses composantes sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ et y_j ses composantes sur la base $\{f_1, f_2, f_3\}$. On peut également représenter chaque vecteur f_j sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, et noter a_{kj} ses composantes. On a ainsi

$$v = \sum_{i=1}^{3} x_i e_i = \sum_{j=1}^{3} y_j f_j \quad , \quad f_j = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}\, e_k \, . \tag{5.1}$$

On en déduit

$$v = \sum_{j=1}^{3} y_j \, (\sum_{k=1}^{3} a_{kj} e_k) = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} a_{kj} y_j \right) e_k \, , \tag{5.2}$$

et comme il y a unicité de la représentation de v sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, on peut identifier ses composantes, pour obtenir

$$x_k = \sum_{j=1}^{3} a_{kj}\, y_j \, . \tag{5.3}$$

En notant A la matrice de coéfficients a_{kj}, on a $x = Ay$ et la matrice de changement de base (de $\{e_1, e_2, e_3\}$ vers $\{f_1, f_2, f_3\}$) est A', la transposée de A.

Les colonnes de A sont constituées des composantes des vecteurs de base $\{f_1, f_2, f_3\}$ exprimés dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. S'agissant de deux bases, on sait que la matrice A est inversible. Prenons maintenant trois vecteurs u, v, w de E, muni de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$, tels que le système de vecteurs $\{u, v, w\}$ soit libre. On note A la matrice dont les colonnes sont constituées des composantes de u, v et w (dans cet ordre) dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. On peut assimiler $\{u, v, w\}$ à une nouvelle base $\{f_1, f_2, f_3\}$, et conclure que la matrice A est nécéssairement inversible.

6 Les déterminants de matrices 3×3

On se donne un espace vectoriel E de dimension 3, et une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ dans cet espace. Soit u, v, w trois vecteurs de E, dont les composantes dans la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ sont notées respectivement x_i, y_j, z_k.

Définition 6.1 *Le déterminant des trois vecteurs u, v, w est le nombre réel*

$$Dét(u, v, w) = x_1 y_2 z_3 + x_3 y_1 z_2 + x_2 y_3 z_1 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \, . \tag{6.1}$$

Il s'agit d'une application de $E \times E \times E = E^3$ dans $\mathbb{R}$, qui est linéaire par rapport à chacun de ses arguments. On vérifie en effet immédiatement que

$$Dét(\alpha u, \beta v, \gamma w) = \alpha\beta\gamma \; Dét(u, v, w) \, , \tag{6.2}$$

et, en introduisant de nouveaux vecteurs $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$,

$$\begin{array}{rcl} Dét(u_1+u_2,v,w) &=& Dét(u_1,v,w) \ + \ Dét(u_2,v,w) \\ Dét(u,v_1+v_2,w) &=& Dét(u,v_1,w) \ + \ Dét(u,v_2,w) \ . \\ Dét(u,v,w_1+w_2) &=& Dét(u,v,w_1) \ + \ Dét(u,v,w_2) \end{array}$$

Si deux vecteurs parmi u, v et w coïncident, alors le déterminant est nul. On vérifie en effet que

$$Dét(u,u,w)=0 \ \ , \ Dét(u,v,v)=0, \quad Dét(u,v,u)=0.$$

En échangeant deux vecteurs parmi u, v et w, on change le signe du déterminant. On a en effet

$$\begin{array}{l} Dét(u,v,w)=-Dét(v,u,w) \\ Dét(u,v,w)=-Dét(u,w,v) \\ Dét(u,v,w)=-Dét(w,v,u) \end{array}$$

Proposition 6.2 *Si le système $\{u, v, w\}$ est lié, alors $Dét(u, v, w) = 0$*

Démonstration : On a $\lambda u+\mu v+\nu w=0$ avec λ, μ, ν non tous nuls. Alors, soit $\lambda \neq 0$ et u s'exprime en fonction de v et w, soit $\lambda = 0$ et nécéssairement $\mu \neq 0$.
Dans le premier cas, $Dét(u,v,w) = Dét(-(\frac{\mu}{\lambda}v+\frac{\gamma}{\lambda}w),v,w) = \ -\frac{\mu}{\lambda}Dét(v,v,w)-\frac{\gamma}{\lambda}Dét(w,v,w) = 0.$
Dans le second cas $Dét(u,v,w) = Dét(u,-\frac{\gamma}{\mu}w,w) = -\frac{\gamma}{\mu}Dét(u,w,w) = 0.$

Soit A une matrice 3×3 de coéfficients a_{ij} sur la base $\{e_1, e_2, e_3\}$. En assimilant la première colonne à un vecteur u (c'est à dire $a_{i1} = x_i$), la seconde colonne à un vecteur v (c'est à dire $a_{j2} = y_j$), et la troisième colonne à un vecteur w (c'est à dire $a_{k3} = z_k$), on définit

$$Dét(A) \ = \ Dét(u,v,w) \ . \tag{6.3}$$

On a effectivement

$$Dét(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Par exemple, $Dét(I) = 1$.

Proposition 6.3 *Si A et B sont deux matrices 3×3, $Dét(AB) = Dét(A)Dét(B)$.*

Ce résultat se déduit des propriétés de linéarité du déterminant. On en déduit, lorsque A est inversible,

$$Dét\ (A^{-1})\ Dét(A) \ = \ Dét(A^{-1}A) \ = \ Dét(I) \ = \ 1 \ ,$$

donc $Dét(A) \neq 0$ et de plus

$$Dét(A^{-1}) \ = \ \frac{1}{Dét(A)} \ . \tag{6.4}$$

Proposition 6.4 *Si le système $\{u, v, w\}$ est libre, alors $Dét(u, v, w) \neq 0$*

Démonstration : Il suffit de remarquer que $\{u, v, w\}$ forment un base et la matrice A de changement de base est inversible, donc $Dét(u, v, w) = Dét(A) \neq 0$.

7 Les sous espaces vectoriels

On s'intéresse aux sous espaces vectoriels de E, espace vectoriel de dimension 3. Un sous espace vectoriel est engendré par un système libre de vecteurs. Ici, il ne pourra s'agir que de systèmes libres constitués d'un seul vecteur, ou de deux vecteurs.

Soit E_1 le sous espace engendré par un vecteur $u \neq 0$. Il est de dimension un, et peut être identifié à $\mathbb{R}$. Les matrices sont des nombres réels ($A = (a_{11})$, $Dét(A) = a_{11}$).

Soit E_2 le sous espace engendré par deux vecteurs u_1, u_2 constituant un système libre. Il est de dimension deux, et peut être identifié à $\mathbb{R}^2$. On munit le sous espace E_2 d'une base (par exemple $\{u_1, u_2\}$). Les matrices sont des tableaux de 4 nombres réels :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

et le déterminant est défini par $Dét(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Les propriétés sont les mêmes qu'en dimension trois. En particulier $Dét(A) = 0$ lorsque les vecteurs lignes sont liés (ou colinéaires), et $Dét(A) \neq 0$ dans le cas contraire. Géométriquement, $|Dét(A)|$ est égal à l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs colonnes de A.