Qu'est ce qu'une onde ?

Alain Le Roux

1 La définition intuitive

La perception intuitive d'une onde correspond à un profil qui se déplace, ou se propage, en subissant éventuellement une modification continue au cours du temps.

A partir de cette interprétation intuitive, il est possible de modéliser sur le plan mathématique, c'est à dire par une équation, la propagation d'une onde. Pour la situer dans un premier temps, nous utiliserons une **variable de position**, par exemple une variable d'espace, qui sera notée le plus souvent $x \in \mathbb{R}^n$, et une **variable d'évolution**, par exemple le temps, et qui sera notée $t \geq 0$; les valeurs de t seront appelées des instants, par analogie avec le temps, et la différence entre deux instants consécutifs sera appelée une durée.

Nous allons commencer par construire cette équation, puis définir quelques termes techniques, pour ensuite construire plusieurs exemples dans des secteurs d'applications très différents. Ensuite, l'éventualité d'ondes multiples apparaissant simultanément sera envisagée, pour nous conduire à la définition de systèmes d'équations susceptibles de modéliser ces différentes ondes ainsi que leurs intéractions éventuelles.

2 L'équation d'une onde

On note x la variable de position, et t la variable d'évolution, puis $\varphi(x,t)$ la valeur, ou l'**amplitude**, du profil d'onde en position x et à l'instant t. Nous allons comparer les situations à deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$, avec $\Delta t > 0$, réputé petit. La position du profil, initialement en position x s'est déplacée pour se retrouver dans une position nouvelle $x + \Delta x$, avec un petit déplacement Δx proportionnel à Δt (ceci au moins au premier ordre) que l'on traduit dans le modèle par une équation de la forme

$$\Delta x \ = \ \lambda(x, t, \varphi, ..) \, \Delta t \ . \tag{2.1}$$

Le coéfficient $\lambda(x, t, \varphi, ..)$ est un élément de $\mathbb{R}^n$, tout comme x, et a la dimension d'une vitesse ; on l'appelera la **vitesse caractéristique** de l'onde.

La modification continue éventuelle du profil d'onde pendant la durée Δt est elle aussi proportionnelle à Δt, et sera notée $\Delta t \ S(x, t, \varphi, ..)$.

Notre définition intuitive nous conduit à écrire

$$\varphi(x,t) \ = \ \varphi(x + \Delta x, t + \Delta t) \ + \ \Delta t \ S(x,t,\varphi, ..) \ + \ \Delta t \ \omega(\Delta t), \tag{2.2}$$

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

où $\omega(\Delta t)$ est **un module de continuité**, c'est à dire une fonction réelle continue à l'origine, où sa valeur est zéro (ainsi $\omega(\Delta t) \longrightarrow 0$ lorsque $\Delta t \longrightarrow 0$). Compte tenu de (2.1), on peut aussi écrire

$$\varphi(x,t) \;=\; \varphi(x+\lambda(x,t,\varphi,..)\Delta t, t+\Delta t) \;+\; \Delta t\; S(x,t,\varphi,..) \;+\; \Delta t\,\omega(\Delta t),$$

et obtenir après un développement limité au premier ordre, quelques simplifications immédiates puis un passage à la limite lorsque Δt tend vers zéro, et aussi sous réserve de disposer de la régularité suffisante, l'équation suivante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;+\; \lambda(x,t,\varphi,..)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} \;+\; S(x,t,\varphi,..) \;=\; 0\,. \tag{2.3}$$

Il s'agit d'une équation du premier ordre. On sait déjà que λ est appelée la vitesse caractéristique, et le terme S sera appelé **le terme source**. L'équation (2.3) modélise la **propagation de l'onde d'amplitude φ.**

Les paramètres λ et S peuvent dépendre de la position x, de l'instant t ou de l'amplitude de l'onde φ, et aussi de tout autre paramètre extérieur susceptible d'intervenir. Lorsque la vitesse caractéristique λ dépend effectivement du profil φ, on dit que l'onde est **vraiment non linéaire** (donc lorsque $\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} \neq 0$), et dans le cas contraire, lorsque $\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = 0$, on dit que l'onde est **linéairement dégénérée**.

3 Quelques exemples d'ondes

3.1 un produit financier

On considère ici un produit financier qui peut être un portefeuille d'actions ou d'obligations, ou encore de produits dérivés, dont la valeur est influencée à la fois par le marché qui impose un taux de rendement, et par des mouvements de capitaux (achats, ventes, retraits, dépôts, etc...)

La variable de position x sera ici le taux de rendement du produit, et la variable d'évolution est le temps. La valeur du produit est notée $\varphi(x,t)$ à l'instant t, lorsque le taux de rendement est x. Entre deux instants consécutifs t et $t+\Delta t$, ce taux de rendement subit une correction $\Delta x = \lambda\Delta t$, et la valeur subit elle même une variation (en bénéfice ou en perte, suivant le signe de x) égale à $x\;\varphi(x,t)\Delta t$ due à la variation du marché, augmentée ou diminuée d'éventuelles opérations d'achats ou de ventes dont le bilan pendant cette durée Δt est noté $\Delta t\; B(x,t,\varphi)$. On obtient l'équation de bilan suivante,

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) \;=\; \varphi(x,t)(1+x\Delta t) \;+\; \Delta t\, B(x,t,\varphi) \;+\; \Delta t\,\omega(\Delta t)\;,$$

qui aboutit à l'équation de propagation suivante

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} \;+\; \lambda\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} \;=\; x\,\varphi \;+\; B\;, \tag{3.1}$$

et le terme source est de la forme $S = -x\varphi - B$.

En général le taux de variation, qui correspond ici à la vitesse caractéristique, est imposé par le marché, et est indépendant de φ, lorsque le protefeuille reste "modeste" ; mais de gros mouvements spéculatifs peuvent provoquer la variation de λ. Ainsi, le modèle est vraiment non linéaire dans des applications macro-économiques, et reste en général linéairement dégénéré en micro-économie.

Remarque 3.1 *Dans le cas du livret de Caisse d'épargne par exemple, le taux reste longtemps constant, mais subit de temps à autres un ajustement. Ceci se traduit par une valeur nulle de la vitesse caractéristique λ tant que le taux est constant, et une variation brutale, comme une impulsion ou une masse de Dirac (notée δ habituellement), au moment choisi par le ministère pour effectuer cet ajustement. Imaginons que le titulaire du livret fasse un mouvement de dépôt ou de retrait au même instant exactement. Dans ce cas la dérivée $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ se comporte aussi comme une masse de Dirac, et le produit $\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ comme le carré d'une masse de Dirac, ce qui peut se concevoir comme un objet mathématique, beaucoup plus général qu'une distribution, et pour lequel nos outils habituels d'analyse fonctionnelle sont encore inadaptés... En pratique, cette situation est toujours évitée, l'ajustement ayant lieu à minuit à un moment où les opérations sont bloquées.*

3.2 Analyse de valeur d'un ensemble de produits

On peut vouloir représenter l'évolution d'un groupe de personnes ou d'objets sur une échelle fixe de notation, par exemple les notes d'étudiants (ou de fonctionnaires...), les tranches de l'impôt sur le revenu, les catégories d'un guide gastronomique, d'un bureau d'études statistiques ou d'une association de consommateurs, etc...

La variable de position x correspond à la note et la variable d'évolution t est toujours le temps. Le profil $\varphi(x,t)$ va correspondre ici à une densité d'objets par unité de l'échelle de notation. On considère une valeur de position x, puis un voisinage de x de la forme $\left[x-\frac{\Delta x}{2}, x+\frac{\Delta x}{2}\right]$, avec $\Delta x > 0$. On note $a(x-\frac{\Delta x}{2})$ le taux de rentrée dans ce voisinage en provenant des notes plus faibles (il s'agit du taux de progression) et $b(x+\frac{\Delta x}{2})$ le taux de rentrée dans ce voisinage également, en provenance des notes plus fortes (taux de régression). On suppose les fonctions a et b suffisamment régulières ; elles dépendent au moins de x, mais une dépendance en φ ou en t n'est pas exclue.

Pendant une durée Δt, la tranche $\left[x-\frac{\Delta x}{2}, x+\frac{\Delta x}{2}\right]$ va se trouver augmentée du sureffectif suivant :

$$\Delta t \, \Big(a(x-\frac{\Delta x}{2}) \, \varphi(x-\Delta x) \; + \; b(x+\frac{\Delta x}{2})\varphi(x+\Delta x) \Big) \; ,$$

et elle va se voir perdre parallèlement un effectif égal à

$$\Delta t \, \Big(a(x+\frac{\Delta x}{2}) \, \varphi(x) \; + \; b(x-\frac{\Delta x}{2})\varphi(x) \Big) \; .$$

Le bilan de l'effectif de la tranche concernée est finalement

$$\varphi(x,t+\Delta t) \; \Delta x \; = \; \varphi(x,t) \; \Delta x \; +$$

$$\Delta t \, \Big(a(x-\frac{\Delta x}{2})\varphi(x-\Delta x) + b(x+\frac{\Delta x}{2})\varphi(x+\Delta x) \; - \; \Big(a(x+\frac{\Delta x}{2}) + b(x-\frac{\Delta x}{2}) \Big) \; \varphi(x) \Big) \; ,$$

à partir duquel on obtient l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;+\; \frac{\partial}{\partial x}((a(x)-b(x))\;\varphi) \;=\; 0\;. \tag{3.2}$$

Cette équation peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;+\; (a(x)-b(x))\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \;+\; (a'(x)-b'(x))\;\varphi \;=\; 0$$

qui fait apparaître la vitesse caractéristique $\lambda = a(x)-b(x)$ et un terme source $S = \Big(a'(x)-b'(x)\Big)\varphi$.

Lorsque l'intervalle de notation est borné, il est immédiat que a et b doivent absolument dépendre de la variable de position x (sinon on sortira de cet intervalle..) Des effets non linéaires peuvent apparaître : on ne va pas donner la même note à tout le monde !, et si la situation se présente, on va peut être chercher à étaler un peu... En situation de vitesse caractéristique nulle, c'est à dire lorsque $a(x) = b(x)$, la vitesse de progression $a(x)$ et la vitesse de régression $b(x)$ restent a priori non nulles ; il y a compensation des deux tendances, mais la situation reste en évolution. Ce dernier cas est bien entendu linéairement dégénéré.

Un exemple intéressant de ce modèle est celui de la fuite des contribuables. La population d'un état est soumise à un taux maximal de prélèvements obligatoires noté $\lambda \in]0,1[$, le taux $\lambda = 1$ signifiant 100% du revenu. Pour un revenu x (variable de position) le prélèvement effectif est noté $q(x,\lambda)$ par exemple $q(x,\lambda) = \sqrt{1+\lambda^2 x^2} - 1$. L'évolution des revenus au cours du temps suit ainsi une loi de la forme

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \;=\; a(x,t) \;-\; q(x,\lambda)\;,$$

où $a(x,t)$ est un taux de variation qui prend en compte la conjecture économique et il n'est pas toujours positif (coût de la vie, inflation, bourses, etc..). On note $\varphi(x,t)$ le nombre de personnes percevant un revenu x à l'instant t, puis $\tau(x,t)$ le taux de renouvellement de ces personnes, qui ont pu voir leur revenus personnels varier pour différentes raisons : les accidents de la vie, les tempêtes, inondations, marées noires ou canicules, les suppressions de primes dans la fonction publiques, etc... On note ensuite $\mu(x,t)$ le taux de volatilité des contribuables, qui vont par exemple décider de s'établir dans un état voisin, où la pression fiscale est jugée plus supportable ($\mu > 0$), ou avoir l'attitude inverse lorsque la contrainte fiscale est plus lourde ailleurs ($\mu < 0$).

Un bilan entre deux instants consécutifs t et $t+\Delta t$ s'écrit

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) \;=\; \varphi(x,t) \;+\; (\tau(x,t)-\mu(x,t))\Delta t \;+\; \Delta t\;\omega(\Delta t)$$

et il conduit à l'équation scalaire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;+\; (a-q)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \;+\; (\mu-\tau)\;\varphi \;=\; 0\;, \tag{3.3}$$

qui est analogue à (3.2), avec un terme source. La rentrée fiscale est donnée par

$$R(\lambda,t) \;=\; \int_0^{+\infty} \varphi(x,t)\; q(x,\lambda)\; dx\;,$$

et compte tenu de la forme de $q(x,\lambda)$, il est possible d'optimiser cette rentrée fiscale en fonction de λ ; on observe en général que $R(\lambda,t)$ réalise un maximum qui ne correspond pas du tout à une valeur maximale de λ.

3.3 L'âge d'une population

La variable de position x est ici l'âge, et la variable d'évolution t est le temps. On note $\varphi(x,t)$ le nombre de personnes ayant l'âge x à l'instant t dans une population donnée. Pendant une durée Δt, on s'attend à voir chaque individu vieillir de la même durée, c'est à dire $\Delta x = \Delta t$. On obtient la vitesse caractéristique $\lambda = 1$, et le modèle est ainsi linéairement dégénéré.

On introduit un taux de mortalité $\mu(x)$, qui dépend certainement de l'âge (et de façon croissante !), qui va permettre d'exprimer que pendant une duré Δt, l'effectif de la population va décroitre de $\mu(x)\varphi(x,t)\Delta t$ individus. Le bilan donne

$$\varphi(x+\Delta x, t+\Delta t) \ = \ \varphi(x,t)\ (1-\mu(x)\Delta t)\ ,$$

et conduit à l'équation d'onde

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ + \ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ + \ \mu(x)\varphi \ = \ 0\ . \tag{3.4}$$

Dans certaines espèces d'insectes, la vitesse de vieillissement n'est pas constante et dépend entre autres de la température ambiante (quand il fait trop froid, on se met en hibernation) donc de la variable d'évolution t. L'équation (3.4) prend la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ + \ \lambda(t)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \ + \ \mu(x)\varphi \ = \ 0\ ,$$

ou encore

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \ + \ \frac{\partial}{\partial x}(\lambda(t)\varphi) \ + \ \mu(x)\varphi \ = \ 0\ ,$$

puisque par nature λ ne dépend pas de x.

On peut envisager de ne plus considérer la population d'un point de vue global, mais aussi d'un point de vue local, sur un territoire donné, par exemple. Dans ce cas la variable de position devra décrire à la fois l'âge et la localisation sur le territoire, soit 3 paramètres si le territoire est de dimension deux en espace, ou même 4 paramètres si le territoire est de dimension 3 (par exemple, si on tient compte de la profondeur, dans un modèle océanique). On peut encore augmenter la dimension de la variable de position en combinant cet exemple avec d'autres de la section précédente...

3.4 Le trafic automobile

On considère un segment routier, sur lequel la circulation se fait obligatoirement dans le même sens (par exemple une rocade) ; on la choisit vers les x croissants, la variable x étant notre variable de position. La variable d'évolution est encore le temps. La densité du trafic au point x, à l'instant t, est représentée par son amplitude $\varphi(x,t)$. La vitesse du trafic sera notée u, et dépend à la fois de la position, du temps, et de la densité du trafic. En effet, si la densité du trafic est faible, l'écoulement de ce trafic se fait théoriquement à la vitesse maximale autorisée, et si le trafic devient trop dense, un bouchon va se former, qui va bloquer la circulation et donc imposer une vitesse de trafic nulle. La dépendance en x permet de représenter par exemple des zones de travaux, des entrées d'agglomération, etc.. et la dépendance en temps correspond à des variations de conditions météorologiques, par exemple, ou encore à un feu de signalisation (dépendance périodique, avec "$u = 0$" quand le feu est au rouge).

La construction du bilan est analogue au cas de la section 3.2, avec $a = u$, $b = 0$, et conduit à l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi) = 0 \, . \tag{3.5}$$

On n'introduit pas de terme source (qui correspondrait par exemple à une bretelle d'entrée ou de sortie) .

Dans le cas où la vitesse du trafic u ne dépend que de la densité du trafic, par une loi de la forme

$$u = g(\varphi) \, , \tag{3.6}$$

l'équation (3.5) prend la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \, g(\varphi)) = 0 \, ,$$

mais aussi la forme suivante, en posant $f(\varphi) = \varphi g(\varphi)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + f'(\varphi) \, \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \, . \tag{3.7}$$

On constate que la vitesse caractéristique est ici

$$\lambda = f'(\varphi) = \varphi \, g'(\varphi) + g(\varphi) \, .$$

En pratique, la fonction $g(\varphi)$ est décroissante, égale à la valeur maximale autorisée pour la vitesse du trafic en cas de trafic raréfié (φ proche de zéro), et nulle lorsque la densité du bouchon (on la note φ_0) est atteinte. Elle est en général concave. De ce fait, la fonction f est nulle en $\varphi = 0$ et en $\varphi = \varphi_0$, et la vitesse caractéristique λ peut prendre des valeurs négatives. Ceci est par exemple le cas au démarrage d'une file de voitures lorsque le feu de signalisation passe au vert : une onde de démarrage remonte (vitesse négative) la file des voitures à l'arrêt.

On retient que la vitesse caractéristique est différente de la vitesse du trafic. L'équation (3.5) se retrouve dans de nombreux autres modèles de la physique où la convection intervient ; on l'appelle **équation de transport**, et correspond à une onde vraiment non linéaire.

3.5 L'équation de Burgers

On considère un écoulement de fluide, de vitesse $u(x,t)$ au point $x \in \mathbb{R}$ (variable de position) et à l'instant $t > 0$ (variable d'évolution), qui n'est pas perturbé (aucune force extérieure). Il n'y a pas de terme source, et le champ de vitesse est tout simplement transporté intégralement par lui même. On obtient ainsi l'équation (2.3), avec $\lambda = \varphi = u$, c'est à dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \, \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \, , \tag{3.8}$$

ou encore

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \, . \tag{3.9}$$

Il s'agit de l'équation de Burgers du premier ordre ; on peut observer qu'elle décrit une situation relativement simple : "il ne se passe rien", et pourtant elle est toujours vraiment non linéaire, puisque $\dfrac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = 1$. On peut aussi remarquer qu'elle joue un rôle central parmi les équations non linéaires du premier ordre. Reprenons par exemple l'équation (3.7), c'est à dire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + f'(\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0\,,$$

et multiplions par $f''(\varphi)$. On obtient, en utilisant le fait que $f''(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}f'(\varphi)$, et la même chose en x, la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}(f'(\varphi)) + f'(\varphi)\,\frac{\partial}{\partial x}(f'(\varphi)) = 0\,,$$

c'est à dire (3.8) avec $u = f'(\varphi)$.
Une autre remarque importante consiste à noter que u est une vitesse, donc de la dimension d'une expression en $\frac{x}{t}$, ou de façon plus générale en $\frac{x-x_0}{t-t_0}$, avec x_0, t_0 donnés, et ensuite à constater qu'effectivement $u = \frac{x-x_0}{t-t_0}$ est une solution particulière de l'équation de Burgers. En utilisant la remarque précédente, on obtient que la formule

$$f'(\varphi) = \frac{x-x_0}{t-t_0} \tag{3.10}$$

donne implicitement des solutions particulières de (3.7).

3.6 Un exemple de combustion : l'évolution d'un feu de forêt.

On représente la forêt sur une carte, de dimension deux, notée (x, y), variable de position, le temps t étant la variable d'évolution, et on se place dans le cas simplifié où la partie brûlée se situe au sud d'une courbe d'équation $y = u(x,t)$, la partie située au nord de cette courbe étant encore intacte, ceci à un instant t fixé. Cette courbe correspond à la ligne de feu ou au front de flamme, et est appelée **interface** en modélisation mathématique.

On compare les situations entre deux instants consécutifs t et $t + \Delta t$. Pendant la durée Δt, un point $(x, u(x,t))$ va provoquer l'embrasement de tout le secteur intact qui se trouve à l'intérieur d'un cercle de centre $(x, u(x,t))$ et de rayon $c\Delta t$, en désignant par c la vitesse de combustion. Cette vitesse peut dépendre de nombreux paramètres, comme l'hétérogénéité de la forêt, d'où une dépendance en x, ou l'influence du vent et bien entendu les efforts des pompiers pour le contenir, ce qui constitue une dépendance en t. Il n'y a pas a priori de dépendance en u. On considère un point $(x, u(x, t+\Delta t))$ situé sur la nouvelle position du front de flamme. Ce point a été allumé à partir d'un position précédente du front de flamme $(\xi(x), u(\xi(x), t))$, distante d'exactement $c\Delta t$, tous les autres points étant situés à une plus grande distance (sinon, ce point aurait été allumé plus tôt). Ceci se traduit par l'expression

$$\inf_{\xi\in\mathbb{R}}\Big(|x-\xi|^2 + |u(x,t+\Delta t) - u(\xi,t)|^2\Big) = c^2\,\Delta t^2\,. \tag{3.11}$$

On en déduit, en tenant compte du fait que la forêt intacte est située au nord du front de flamme,

$$u(x, t+\Delta t) = \operatorname*{Inf}_{\xi\in\mathbb{R}}\left(u(\xi,t) + \sqrt{c^2\Delta t^2 - |x-\xi|^2}\right),$$

le minimum étant réalisé au même point $\xi(x)$ qu'en (3.11). On introduit la variable $\eta = \dfrac{\xi - x}{\Delta t}$, ce qui permet d'écrire $\xi = x + \eta\Delta t$, et d'obtenir

$$u(x, t+\Delta t) \;=\; \underset{\eta\in[-c,c]}{Inf} \left(u(x+\eta\Delta t, t) \;+\; \Delta t\,\sqrt{c^2-\eta^2}\,\right) . \tag{3.12}$$

On note en effet que l'écriture $\sqrt{c^2-\eta^2}$ impose $\eta \in [-c, c]$. On utilise ensuite les développements suivants (ce qui revient à faire une hypothèse de régularité sur u) :

$$\begin{aligned} u(x+\eta\Delta t, t) \;&=\; u(x,t) \;+\; \eta\Delta t\tfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) \;+\; \eta^2\Delta t\;\omega_1(\Delta t)\;, \\ u(x, t+\Delta t) \;&=\; u(x,t) \;+\; \Delta t\;\tfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;+\; \Delta t\;\omega_2(\Delta t), \end{aligned}$$

où $\omega_1(\Delta t)$ et $\omega_2(\Delta t)$ sont des modules de continuité, et compte tenu des propriétés du symbole Inf, et sachant $\Delta t > 0$, on aboutit à l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;+\; \omega_2(\Delta t) \;=\; \underset{\eta\in[-c,c]}{Inf} \left(\eta\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \;+\; \eta^2\omega_1(\Delta t) \;+\; \sqrt{c^2-\eta^2}\right) ,$$

sur laquelle on fait tendre Δt vers zéro. On obtient à la limite l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \;-\; \underset{\eta\in[-c,c]}{Inf} \left(\eta\;\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \;+\; \sqrt{c^2-\eta^2}\right) \;=\; 0 \;\; ,$$

qui est de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} \;+\; f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \;=\; 0\;, \tag{3.13}$$

avec f définie par

$$f(p) \;=\; -\underset{\eta\in[-c,c]}{Inf} \left(\eta\; p \;+\; \sqrt{c^2-\eta^2}\right) , \tag{3.14}$$

c'est à dire, par un calcul immédiat,

$$f(p) \;=\; -\,c\,\sqrt{1+p^2}\;. \tag{3.15}$$

En posant $\varphi = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, on obtient une équation d'onde du premier ordre en dérivant (3.13) par rapport à x :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \;+\; \frac{\partial}{\partial x}(f(\varphi)) \;=\; 0 \;\;,\;\;\; f(\varphi) \;=\; -\,c\,\sqrt{1+\varphi^2}\;. \tag{3.16}$$

La vitesse caractéristique λ est donnée par

$$\lambda \;=\; -\,\frac{c\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}\;,$$

dont le signe dépend du signe de φ, et une éventuelle hétérogénéité du couvert végétal se traduit par l'apparition d'un terme source

$$S \;=\; -\,\sqrt{1+\varphi^2}\;\frac{\partial c}{\partial x}\;.$$

Les équations de la forme (3.13) sont appelées **équations d'Hamilton Jacobi**, et trouvent de nombreuses autres applications en pratique. Elles ont en particulier été très utilisées dans la conception des boosters de lanceurs dans l'industrie spatiale, et dans l'optimisation des techniques de dépôt des couches de silicium dans la fabrication des microprocesseurs dans l'industrie informatique. Dans certains cas, il n'est plus exclu que la vitesse c dépende de $\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$, c'est à dire de la régularité de l'interface. On la retrouve également dans la modélisation des isochrones, c'est à dire le graphe contenant tous les points que l'on peut joindre au bout de la même durée Δt, à partir d'un lieu de départ donné, pour un champ de vitesses données. Le famille de courbes orthogonales à ces isochrones constituent les trajectoires optimales, au sens imposé par le champ de vitesses : critère de temps minimal, d'évitement de pentes trop fortes ou de secteurs à risques, de recherche de consommation minimale, ou critère composite prenant en compte plusieurs contrôles. Ces trajectoires sont utilisées en recherche opérationnelle pour déterminer des plans de parcours en agglomération, sur un réseau routier, en tout terrain, dans les domaines aéronautiques (éviter les cyclones), maritimes ou de l'espace (trajectoire des satellites). On les retrouve également dans la conception des jeux vidéo.

3.7 Et lorsque la variable d'évolution n'est plus le temps

La généralisation à la dimension deux (variable de position notée (x, y)) d'une équation de transport, de type (3.5), et lorsqu'un terme source est présent, prend la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\varphi) + S = 0 , \tag{3.17}$$

en désignant par (u, v) le vecteur vitesse. Supposons que φ soit la concentration d'un produit chimique ou biologique dilué dans l'écoulement de vitesse (u, v), et qui interagit avec le milieu. C'est par exemple le cas d'une sortie de station d'épuration en milieu marin et dont les bactéries d'une part ne vont pas influencer l'écoulement et d'autre part disparaitre rapidement (en quelques heures) du fait de l'exposition à la salinité, et ceci d'autant plus rapidement que le brassage est important. Ceci peut se traduire par un terme source de la forme

$$S = A\, e^{k\sqrt{u^2+v^2}}\, \varphi ,$$

où A et k sont des constantes données (à estimer expérimentalement en pratique).

On fait maintenant l'hypothèse que l'écoulement est stationnaire (c'est à dire qu'en une position donnée, la concentration φ ne dépend pas du temps, d'où $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$), et que l'écoulement connait une direction dominante, ce qui se traduit par exemple par $v \geq v_0$, avec $v_0 > 0$ fixe. L'équation devient

$$\frac{\partial}{\partial y}(v\varphi) + \frac{\partial}{\partial x}(u\varphi) + S = 0 ,$$

et en posant $\psi = v\varphi$, on obtient

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u}{v}\,\psi\Big) + \frac{A}{v}\,\psi\, e^{k\sqrt{u^2+v^2}} = 0 . \tag{3.18}$$

Il s'agit d'une équation d'onde dont la variable d'évolution est une direction particulière de l'espace.

Un autre exemple existe également en gestion de personnel, en prenant comme variable de position le salaire, noté x, et comme variable d'évolution, le mérite, noté m, et non seulement l'ancienneté. Supposons qu'on ait réussi à exprimer et chiffrer dans ce terme de mérite toutes les actions utiles des agents, pour en faire une variable purement cumulative. On note $\varphi(x, m)$ la densité de personnel touchant le salaire x et ayant accumulé le mérite m.
Le taux d'accroissement du salaire par rapport au mérite peut s'interpréter comme une vitesse, que l'on note $w(x, m, \varphi, ..)$ et qui dépend de nombreux paramètres (dont des restrictions budgétaires éventuelles) ; on obtient l'analogue d'une équation de transport qui s'écrit ici

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} + \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\, w) + S(x, m, \varphi, ..) = 0 , \tag{3.19}$$

où $S(x, m, \varphi, ..)$ correspond à un terme source qui peut dépendre de nombreux paramètres. La vitesse caractéristique est donnée par

$$\lambda = \varphi \frac{\partial w}{\partial \varphi} + w ,$$

et il peut être troublant, et même inquiétant, de constater que cette vitesse peut être négative, ceci bien que w soit a priori positive. En effet, le paramètre w dépend d'un budget fixé a priori, à répartir "au mérite" entre un certain nombre d'agents : si ce nombre augmente, la part de chacun risque de diminuer, ce qui se traduit par une valeur négative de $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$ qui, multipliée par une forte valeur de φ peut rendre λ négative.

3.8 Le modèle de Black et Scholes

En finance, une option d'achat (un "call") est un contrat à terme concernant un produit financier, par exemple un portefeuille d'actions, qui stipule qu'un prix d'exercice E est fixé a priori et qu'à une date d'échéance fixée elle aussi a priori, dite date d'expiration et notée T, le client qui détient l'option d'achat peut récupérer le produit en le payant au prix d'exercice E convenu auparavant. Entre temps, le gestionnaire du produit va chercher à le valoriser au maximum, en essayer d'en limiter les risques. La question est de déterminer la valeur effective de cette option, ce que l'on notera C. Si à l'instant T le prix du produit vaut S, la valeur de l'option vaut $S - E$. Le gestionnaire ne proposera cette option d'achat que lorsque $S - E > 0$, sinon il travaille en pure perte. La valeur de l'option à l'échéance T est donc

$$C(S, T) = Max(\, S - E,\; 0\,) . \tag{3.20}$$

Le prix du produit pendant la durée du contrat est influencé par la volatilité (coefficient noté σ) et par un facteur de risque, représenté par un mouvement de type Brownien, noté $Z(t)$, où t représente le temps. Nous prendrons comme variable de position le prix S et comme variable d'évolution le temps restant avant l'échéance, c'est à dire $\tau = T - t$.

En utilisant un résultat de modélisation économique (lemme de Ito), on obtient les deux accroissements suivants au cours d'une durée Δt :

$$\Delta C = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu\, S \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma\, S \frac{\partial C}{\partial S} \Delta Z , \tag{3.21}$$

et

$$\Delta S \;=\; \mu\, S\, \Delta t \;+\; \sigma\, S\, \Delta Z\;, \tag{3.22}$$

où μ est le taux de rendement espérer de l'actif.

Le gestionnaire va en fait se constituer un portefeuille élargi constitué de notre option, de valeur $C(S,t)$ et d'un certain nombre d'actions du même type, qui vont servir à corriger la variation $\Delta\pi$ de ce portefeuille. On pose, en introduisant un paramètre de contrôle γ à ajuster

$$\Delta\pi \;=\; \Delta C \;-\; \gamma\, \Delta S\;.$$

Cette variation du portefeuille, compte tenu de (3.21) et (3.22) s'écrit aussi

$$\Delta\pi \;=\; \left(\frac{\partial C}{\partial t} \;+\; \mu\, S\, \frac{\partial C}{\partial S} \;+\; \frac{\sigma^2 S^2}{2}\, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \;-\; \gamma\, \mu\, S\right) \Delta t \;+\; \sigma\, S \left(\frac{\partial C}{\partial S} - \gamma\right) \Delta Z\;. \tag{3.23}$$

On s'aperçoit immédiatement qu'en prenant $\gamma = \frac{\partial C}{\partial S}$ on élimine le risque. Le gestionnaire a donc intérêt à suivre systématiquement cette stratégie. Par ailleurs , en notant r le taux de rendement du portefeuille, on a

$$\Delta\pi \;=\; r\, \pi\, \Delta t \;=\; r\left(C - S\frac{\partial C}{\partial S}\right) \Delta t\;,$$

à reporter dans (3.23) pour obtenir l'**équation de Black-Scholes**

$$\frac{\partial C}{\partial t} \;+\; r\, S\, \frac{\partial C}{\partial S} \;+\; \frac{\sigma^2 S^2}{2}\, \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \;-\; r\, C \;=\; 0\;. \tag{3.24}$$

Il ne faut pas oublier que la variable d'évolution est en fait $\tau = T - t$, et que cette équation est donc à résoudre "en remontant le temps". Il faut aussi noter qu'en éliminant le risque on a aussi éliminé le paramètre μ, le taux de rendement "espéré", qu'il n'est donc pas nécessaire d'estimer a priori. Lorsque la volatilité est faible on peut négliger le terme en σ^2 et obtenir une équation d'onde du premier ordre dont la vitesse caractéristique est $\lambda = -rS$.

4 Quelques remarques essentielles

De nombreux autres exemples apparaissent également dans des applications très variées ; on peut citer l'industrie pharmaceutique dans la compression des poudres d'excipient pour fabriquer des comprimés, l'hydraulique et les vagues de surf entre autres, les écoulements en milieu poreux, la détonique et les impacts, la chirurgie, en particulier dans la prévision du résultat dans les interventions plastiques (biomécanique), etc...

Les différentes constructions des modèles pour retrouver finalement une même équation d'onde ont chacune apporté une idée ou une propriété qui peut aussi être commune aux autres exemples. Nous allons en sélectionner quelques unes, qui vont costituer des premiers résultats très utiles.

4.1 La notion de semi groupe

La diversité des constructions des équations dans ces différents modèles permet déjà d'enrichir l'étude de chacun de ces modèles. Ainsi, la construction du modèle de feu de forêt (3.16) utilise la formule (3.12) qui conduit en fait à une formulation explicite de la solution d'une équation de la forme

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(\varphi)) = 0 ,$$

avec une fonction f qui est soit toujours convexe, soit toujours concave. En effet une fonction u telle que $\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$ est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 ,$$

et donnée par une expression de la forme suivante, lorsque f est convexe (cas différent du feu de forêt pour lequel la fonction f correspondante est concave),

$$u(x, t+s) = \inf_{\xi \in \mathrm{R}} \left(u(\xi, s) + t\, f^*(\frac{x-\xi}{t}) \right) , \tag{4.1}$$

où f^* est déterminée par

$$f^*(p) = \sup_{v \in \mathrm{R}} (vp - f(v)) \tag{4.2}$$

et est appelée **polaire conjuguée** de f ; comme f est convexe, on a $f^{**} = f$. En particulier, pour $s = 0$, on obtient

$$u(x, t) = \inf_{\xi \in \mathrm{R}} \left(u_0(\xi) + t\, f^*(\frac{x-\xi}{t}) \right) , \tag{4.3}$$

où u_0 correspond à une donnée initiale $\big(u(x, 0) = u_0(x)\big)$. La formule (4.3) permet en général d'expliciter la solution, et toujours de l'évaluer point par point ; il suffit de la dériver ensuite pour obtenir $\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}$. La formule (4.3) correspond à une expression du **semi groupe** associé à l'équation d'onde considérée, c'est à dire d'un opérateur $S(t)$ tel que

$$u(., t) = S(t)\, u(., 0) \tag{4.4}$$

représentant l'évolution de la solution à partir de sa valeur initiale, en $t = 0$. La formule (4.1) correspond à

$$u(., t+s) = S(s)\, u(., t) . \tag{4.5}$$

Notons que l'opérateur S vérifie $S(t+s) = S(t) \circ S(s)$, ce qui explique l'appelation de semi groupe. L'approximation de cet opérateur de semi groupe, lorsque $s = \Delta t$, s'interprête comme l'écriture d'un **schéma numérique** qui va permettre, lorsqu'on dispose d'une approximation de la solution à l'instant t, d'en déduire une approximation à l'instant $t + \Delta t$.

4.2 La notion de flux

Lorsque la quantité transportée q suit une équation de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial m}{\partial x} = 0 , \tag{4.6}$$

le terme m est appelé le **flux,** ou quelquefois **flux de masse**. Dans le cas d'une équation de transport,

$$m \;=\; q\,u\;, \tag{4.7}$$

où u est la **vitesse**, ou plus précisément la **vitesse de la matière transportée**. La formulation de l'équation (4.6), et de façon générale pour une équation de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} \;+\; \frac{\partial m}{\partial x} \;+\; S \;=\; 0\;, \tag{4.8}$$

est appelée **forme conservative** contrairement à une expression générale de la forme (2.3). Ceci correspond physiquement à la **conservation de la masse**, c'est à dire la conservation de l'intégrale de la quantité q concernée. Si par exemple $x \in [a,b]$ un intervalle réel, l'intégration de (4.6) donne

$$\frac{d}{dt}\int_a^b q(x,t)\;dx \;=\; m(a) - m(b)\;,$$

et si $m(a) = m(b)$, l'intégrale, qui représente la masse, reste constante, c'est à dire conservée.

On note que le flux m n'intervient en fait que "à une constante près", mais il est naturel d'exiger que ce flux est nul lorsqu'il n'y a pas de masse présente, ce qui lève l'ambiguïté dans la plupart des cas.

4.3 La notion de caractéristique

L'expression (2.1) conduit naturellement à l'équation

$$\frac{dx}{dt} \;=\; \lambda(x,t,\varphi,..) \tag{4.9}$$

que nous appellerons **équation caractéristique**, et qui correspond à une courbe particulière du plan (x,t), appelé **plan physique**. En effet, l'équation (2.3) indique que la quantité $\varphi(t,x(t))$ ne varie qu'en fonction du terme source :

$$\frac{d}{dt}\,\varphi(t,x(t)) \;+\; S(x(t),t,\varphi(x(t),t)) \;=\; 0\;, \tag{4.10}$$

et en particulier reste constante le long de cette courbe lorsque $S = 0$ (cas homogène). Cette courbe est appelée **courbe caractéristique**. Elle permet également de construire explicitement des solutions. On peut l'interpréter comme la **trajectoire** des particules constituant la solution considérée comme une densité.

Reprenons l'équation de Burgers (3.8) c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} = 0$; les caractéristiques doivent vérifier le système (4.9), (4.10), qui se réduit ici à

$$\frac{d}{dt}x(t) \;=\; u(t,x(t)) \quad ; \quad \frac{d}{dt}u(t,x(t) \;=\; 0\,. \tag{4.11}$$

On constate que $u(t,x(t)$ reste bien constant le long de la caractéristique, mais comme il s'agit aussi de la pente de cette caractéristique, on aboutit à la conclusion : "**les caractéristiques sont des**

droites". Ainsi une valeur initiale en un point x_0, notons la $u_0(x_0)$, est aussi la valeur de la solution le long de cette droite caractéristique dont l'équation est nécessairement

$$x = x_0 + u_0(x_0)\, t \ .$$

La donnée u_0 est appelée **donnée initiale** ou **condition initiale**. Considérons un point quelconque (x, t) du plan physique ; la valeur $u(x, t)$ de la solution en ce point coïncide avec une valeur de la condition initiale en un point x_0 qui doit satisfaire les deux conditions suivantes

$$u(x,t) = u_0(x_0) \ , \quad x = x_0 + u(x,t)\, t \ .$$

En éliminant x_0, on obtient l'équation implicite en $u(x, t)$

$$u(x,t) = u_0(\, x - u(x,t)\, t) \tag{4.12}$$

et que nous appellerons **équation caractéristique**.

On retrouve une équation analogue dans le cas général de l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + f'(\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$$

déjà rencontrée à plusieurs reprises. On a ainsi remarqué que $u = f'(\varphi)$ est solution de l'équation de Burgers (3.8). Les équations (4.9) et (4.10) s'écrivent ici

$$\frac{d}{dt}\, x(t) = f'(\varphi(x(t), t)) \ ; \ \frac{d}{dt}\, \varphi(x(t), t) = 0 \ .$$

En notant φ_0 la donnée initiale, on aboutit comme précédemment à l'équation caractéristique (implicite en $\varphi(x, t)$)

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(\, x - f'(\varphi(x,t))\, t\,) \ . \tag{4.13}$$

La résolution de (4.12), ou dans le cas plus général de (4.13) permet de construire des solutions explicites.

4.4 Les notions de chocs et de détente

Dans le cas vraiment non linéaire, ces trajectoires caractéristiques vont pouvoir se rencontrer, ce qui constitue une situation incompatible : chaque trajectoire porte une valeur différente de la solution, et au niveau de l'intersection de ces trajectoires, on se retrouve avec deux valeurs différentes possibles. Cette situation est physiquement envisageable, et se traduit par une **onde de choc**. Il peut aussi y avoir une situation contraire où ces trajectoires caractéristiques divergent (ou s'écartent), laissant apparaître une **onde de détente** ou **onde de raréfaction** dans l'ouverture créée par la divergence du faisceau des caractéristiques.

Dans le cas linéairement dégénéré, ces convergences ou divergences des trajectoires caractéristiques sont exclues. Cependant deux caractéristiques mitoyennes peuvent porter des valeurs très différentes de la solution, laissant apparaître une discontinuité, appelée **discontinuité de contact**.

Dans le cas du trafic automobile, un ralentissement brutal (coup de frein !) correspond à une onde de choc, et un redémarrage de la file de voitures correspond à une onde de détente ou de raréfaction. Dans le premier cas l'espace entre les véhicules dimminue rapidement jusqu'à devenir nul si la dendité de bouchon est atteinte. Dans l'autre cas cet espace augmente doucement, au fur et à mesure que le trafic reprend de la vitesse. Notons bien qu'une onde de choc est interprêtée ici comme un ralentissement brutal, et pas du tout comme une collision...

4.5 La notion d'entropie

Des termes du second ordre peuvent apparaître au second membre des équations d'ondes ; ce fut le cas du terme de volatilité par exemple, dans le modèle de Black-Scholes. Ils permettent de représenter un terme de diffusion ou de viscosité en écoulement de fluides, ou d'effet de tension en biomécanique. Le signe du coefficient de ce terme doit absolument être positif pour assurer une certaine dispersion de l'amplitude, et représenter ainsi, par analogie physique, l'augmentation inéluctable d'une quantité appelée **entropie**. Dans le cas de l'équation de Black-Scholes, en première lecture, ce terme semble avoir le mauvais signe :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + r\,S\,\frac{\partial C}{\partial S} - r\,C = -\frac{\sigma^2 S^2}{2}\,\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\ .$$

Il suffit de rappeler que la variable d'évolution n'est pas ici le temps t mais $T-t$, et en notant $\tau = T - t$, l'équation prend la forme

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - r\,S\,\frac{\partial C}{\partial S} + r\,C = +\frac{\sigma^2 S^2}{2}\,\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\ ,$$

et on retrouve effectivement le bon signe.

Dans le cas vraiment non linéaire, cette notion d'entropie va nous être utile pour la gestion des ondes de choc ; en effet, ce type de singularité induit des problèmes d'interprétation, qu'il est nécessaire d'inclure dans la formulation, et l'entropie, ou plus précisément sa croissance inéluctable, permet de reconstruire les bons profils de choc, et surtout d'éliminer ceux qui n'ont aucune réalité physique.

5 Les systèmes hyperboliques

Dans tous les exemples précédents, le profil φ de l'onde était caractérisé par une seule équation, qui suffisait à décrire l'état de l'onde. Dans de nombreux autres cas, cet état est décrit par plusieurs paramètres, par exemple la vitesse et la profondeur de l'eau en hydraulique, la densité, le température et la pression dans un gaz. Chaque paramètre introduit une nouvelle équation, et l'état de l'onde devient décrit non plus par une seule équation mais par un système de N équations, N étant le nombre de paramètres introduits. Il reste alors à en dégager l'équation qui va concerner le profil φ de l'onde étudiée, et éventuellement dégager des conditions pour assurer la compatibilité mutuelle de ces équations

On note $u_1,\ u_2,\ ..u_N$ ces différents paramètres et on se restreit au cas où la vériable de position x est réelle. Chacun de ces paramètres est concerné par une équation de la forme

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} A_{jk}(u_1, u_2, ..u_N, x, t, ..)\,\frac{\partial u_k}{\partial x} + S_j(u_1, u_2, ..u_N, x, t) = 0\ , \tag{5.1}$$

où la matrice des coefficients $A_{jk}(u_1, u_2, ..u_N, x, t..)$ assure le couplage des équations entre elles. Cette matrice est appelée **matrice de flux**. Les termes S_j représentent d'éventuels termes source.

On introduit le profil φ de l'onde particulière que l'on étudie, en écrivant que chaque paramètre est une fonction de ce profil :

$$u_j = u_j(\varphi)\ , \tag{5.2}$$

en ajoutant bien évidemment que s'il n'y a pas effectivement de relation entre un paramètre u_{j_0} particulier et le profil φ, la fonction u_{j_0} est tout simplement une fonction constante. On exige seulement que l'une de ces relations ne soit pas constante, c'est à dire qu'il existe au moins un paramètre u_{j_*} pour lequel la dérivée par rapport à φ est non nulle ($u'_{j_*} \neq 0$). On recherche pour φ une équation de la forme (2.3), c'est à dire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \,+\, \lambda(x,t,\varphi,..)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} \,+\, S(x,t,\varphi,..) \;=\; 0\,.$$

En utilisant (5.2) qu'on introduit dans chacune des équations (5.1), on obtient, pour tout $j \in \{1,2,..N\}$,

$$u'_j(\varphi)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} \,+\, \left(\sum_{k=1}^{N} A_{jk}\, u'_k(\varphi)\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \,+\, S_j \;=\; 0 \tag{5.3}$$

ce qui constitue une première condition de compatibilité : on doit exiger

$$\forall j \in \{1,2,..,N\} \qquad \sum_{k=1}^{N} A_{jk}\, u'_k(\varphi) \;=\; \lambda\, u'_j(\varphi)\ . \tag{5.4}$$

On sait que le vecteur des dérivées $\left(u'_1, u'_2, ..u'_N\right)$ est non nul (car $u'_{j_*} \neq 0$). La relation (5.4) impose que λ soit une **valeur propre** de la matrice de flux $\left(A_{jk}\right)$, de **vecteur propre** $\left(u'_1, u'_2, ..u'_N\right)^t$. On note également que pour représenter une vitesse caractéristique, la valeur propre λ **doit être réelle**.

Le système d'équations (5.4) peut décrire la propagation de plusieurs ondes ; on s'attend en fait à ce qu'il en décrive exactement N. Une condition nécessaire pour cela est que la matrice de flux ait toutes ses valeurs propres réelles. **Un système de type** (5.4) **dont la matrice de flux a toutes ses valeurs propres réelles est appelé un système hyperbolique. Il est strictement hyperbolique lorsque toutes ces valeurs propres sont simples.** Lorsqu'une valeur propre est multiple, on doit se poser la question de l'opportunité de réduire le système d'une équation.

Considérons maintenant une onde particulière, dont la vitesse caractéristique est notée $\lambda = \lambda(u_1, u_2, ..u_N)$ ou encore $\lambda = \lambda(u_1(\varphi), u_2(\varphi), ..u_N(\varphi)) = \lambda(\varphi)$ en utilisant le profil φ. L'onde est vraiment non linéaire lorsque $\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \neq 0$, ce qui se traduit au niveau des paramètres u_j par la condition

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \lambda}{\partial u_k}\, u'_k(\varphi) \;\neq\; 0\ ,$$

ou encore, en notant R le vecteur propre $\left(u'_1, u'_2, ..u'_N\right)^t$, que **l'onde est vraiment non linéaire lorsque $\nabla\lambda.R \neq 0$,** ou **linéairement dégénérée lorsque $\nabla\lambda.R = 0$.**

La question de la compatibilité des termes sources sera traitée plus tard.