LA FORMULE DE HOPF ET LAX

Alain Yves LE ROUX
Cours de DEA

Bordeaux, octobre 1999

Dans ce chapitre on fait le lien entre une caractérisation de la solution, sous la forme d'une formule explicite, la Formule de Hopf et Lax, et l'équation quasi linéaire du premier ordre dans sa formulation Hamilton Jacobi. La formule de Hopf et Lax étant explicite, elle assure trivialement l'unicité de la solution ainsi caractérisée, tandis que l'unicité n'est pas du tout assurée par l'équation d'Hamilton Jacobi. Le passage de la formule de Hopf et Lax à l'équation se fait donc assez facilement, et la construction d'une sorte de réciproque va être proposée, en optimisant sur une classe de solutions, de façon à retrouver la formule de Hopf et Lax.

Ce chapitre commence par un exemple fondamental. Ensuite, quelques rappels sur la transformation de Fenchel vont être indispensables pour la construction elle même de la formule. Enfin une exploitation de cette formule va être développée, afin de montrer l'apparition naturelle de solutions avec choc, c'est à dire singulières, pour l'équation de Burgers.

1 Un exemple fondamental : la combustion du propergol.

Il s'agit d'un problème bidimensionnel, où la surface de combustion à l'instant t peut être représentée par une courbe d'équation $y = v(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$. On note $c > 0$ la vitesse de combustion, supposée constante.

Le modèle se met en place en avançant les arguments suivants. Un point $P = (x, v(y,t))$ va entrer en combustion à l'instant t s'il existe au moins un point $M = (\xi, v(\xi, t-\Delta t)$ en combustion à l'instant $t - \Delta t$, tel que la distance qui les sépare soit exactement $c\Delta t$, c'est à dire $\left|PM\right| = c\Delta t$, et si tous les autres points de la courbe de combustion à l'instant $t - \Delta t$ en soient plus éloignés. Ceci se traduit par la formule

$$\operatorname*{Inf}_{\xi \in \mathbb{R}} \left(|x-\xi|^2 + |v(x,t) - v(\xi, t-\Delta t)|^2 \right) = c^2\, \Delta t^2 \tag{1.1}$$

et cette formule conduit à l'une des deux suivantes, suivant que le propergol frais est situé au dessous (pour la formule (1.2)) ou au dessus (pour la formule (1.3)) de la zone déjà brulée.

$$\forall t > 0,\ \forall \Delta t \in]0,t[\ \ v(x,t) = \operatorname*{Sup}_{\xi \in \mathbb{R}} \left(v(\xi, t-\Delta t) + c\Delta t \sqrt{1 - \frac{|x-\xi|^2}{c^2 \Delta t^2}} \right) \tag{1.2}$$

Typeset by the TEX-preprocessor PreTEX

$$\forall t>0,\ \forall \Delta t \in]0,t[\ \ v(x,t) \ = \ \operatorname*{Inf}_{\xi\in\mathbb{R}} \left(v(\xi, t-\Delta t) - c\Delta t \sqrt{1-\frac{|x-\xi|^2}{c^2\Delta t^2}} \right) \tag{1.3}$$

Nous allons choisir la disposition correspondant à (1.3).
En posant

$$g(p) \ = \ \begin{cases} +\infty \ \ si \ |p|>c, \\ -c\sqrt{1-\frac{p^2}{c^2}} \ \ si \ -c \leq p \leq c\ , \end{cases}$$

on a la formule

$$\forall\ s \in]0,t[\ \ \ v(x,t) \ = \ \operatorname*{Inf}_{\xi\in\mathbb{R}} \left(v(\xi,t-s) \ + \ s\, g(\frac{\xi-x}{s}) \right) .$$

On effectue un développement de Taylor de $v(\xi, t-s)$ en $\xi = x,\ s = 0$, pour écrire

$$v(\xi,t-s) + sg(\frac{\xi-x}{s}) \ = \ v \ + (\xi-x)vdx \ - sv_t \ + sg(\frac{\xi-x}{s}) + \ s\sqrt{1+\frac{(\xi-x)^2}{s^2}}\ \delta(\xi-x,s),$$

où $v = v(x,t),\ v_x = v_x(x,t),\ v_t = v_t(x,t)$ et $\delta(\xi-x,s)$ tend vers zéro si $\xi - x$ et s tendent vers zéro simultanément. On minimise cette expression en $\xi \in \mathbb{R}$ (on prend l'Inf..), et on obtient sachant $s>0$ et en utilisant quelques propriété élémentaires de l'Inf,

$$v \ = \ v \ - \ sv_t \ + \ s \operatorname*{Inf}_{\xi\in\mathbb{R}} \left(\frac{\xi-x}{s}v_x + \ g(\frac{\xi-x}{s}) + \ \sqrt{1+\frac{(\xi-x)^2}{s^2}}\ \delta(\xi-x,s) \right)$$

d'où

$$v_t \ = \ \operatorname*{Inf}_{\xi\in\mathbb{R}} \left(\frac{\xi-x}{s}v_x + \ g(\frac{\xi-x}{s}) + \ \sqrt{1+\frac{(\xi-x)^2}{s^2}}\ \delta(\xi-x,s) \right) .$$

On pose $p = \dfrac{\xi-x}{s}$ pour obtenir

$$v_t \ = \ \operatorname*{Inf}_{p\in\mathbb{R}} \left(pv_x \ + \ g(p) \ + \ \sqrt{1+p^2}\ \delta(ps,s) \right) \ ,$$

et il est immédiat que le minimum est réalisé en un point p situé entre $-c$ et c, ceci indépendament de la valeur de s. On fait tendre s vers zéro pour obtenir

$$v_t \ = \ \operatorname*{Inf}_{p\in\mathbb{R}} \left(pv_x \ + \ g(p) \ \right) \ ,$$

que l'on peut expliciter facilement. En effet, le minimum est réalisé en

$$p \ = \ -\frac{v_x\, c}{\sqrt{1+v_x^2}}\ ,$$

où il vaut $-c\ \sqrt{1+v_x^2}$. On a obtenu

$$v_t \ + \ c\ \sqrt{1+v_x^2} \ = \ 0\ , \tag{1.4}$$

et en posant $u = v_x$, $f(u) = c\sqrt{1+u^2}$ on obtient

$$u_t \; + \; f(u)_x \; = \; 0 \; ,$$

qui est bien une équation quasi linéaire du premier ordre. L'équation (1.4) est une équation de type Hamilton-Jacobi.

2 La transformation de Fenchel

Définition 2.1 *Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$; sa transformée de Fenchel est définie, pour $p \in \mathbb{R}$, par*

$$f^*(p) \; = \; \operatorname*{Sup}_{v \in \mathbb{R}} \; (\; p \, v \; - \; f(v) \;) \; . \tag{2.1}$$

Commençons par illustrer cette définition de quelques exemples. On a vu que pour

$$f(u) \; = \; \begin{cases} +\infty \; si \; |u| > 1 \\ -\sqrt{1-u^2} \; si \; -1 \leq u \leq 1 \end{cases}$$

la transformée de Fenchel est $f^*(p) = \sqrt{1+p^2}$, qui est convexe continue.

Dans le cas linéaire

$$f(u) \; = \; a \, u$$

on obtient

$$f^*(p) \; = \; \begin{cases} 0 \quad si \; p = a \\ +\infty \quad sinon \end{cases}$$

et comme f est convexe et continue, la transformée de f^* est encore f.

Pour $f(u) = \dfrac{\left|u\right|^{\alpha}}{\alpha}$ avec $\alpha > 1$, on obtient $f^*(p) = \dfrac{\left|u\right|^{\beta}}{\beta}$ où β est tel que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. On retrouve la relation de dualité classique. Notons que pour $\alpha = 2$, on a identité entre f et f^*.

On rappelle qu'une fonction f est semi continue inférieurement lorsque

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{x \longrightarrow x_0} f(x) \; \geq \; f(x_0) \; .$$

Elle est convexe sur $\mathbb{R}$ lorsque

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;\; \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \; \leq \; \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \; .$$

Il est immédiat que le "Sup" de fonctions convexes est convexe, et que le "Sup" de fonctions s.c.i. est s.c.i. De plus les fonctions $p \longmapsto pv - f(v)$ sont linéaires continues en $p \in \mathbb{R}$, donc en particulier convexes s.c.i., d'où la propriété

Proposition 2.2 *Une transformée de Fenchel f^* est toujours convexe, s.c.i.*

La proprosition suivante est tout aussi évidente (il suffit de dériver en $v \in \mathbb{R}$ dans (2.1)),

Proposition 2.3 *Si f est continuement dérivable, alors*

$$f^*(p) \;=\; v(p)\, f'(v(p)) \;-\; f(v(p)) \;,$$

où $v(p)$ est telle que $f'(v(p)) = p$.

Proposition 2.4 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et f^* sa transformée de Fenchel. Alors on a l'inégalité de Fenchel*

$$\forall p \in \mathbb{R},\;\; \forall v \in \mathbb{R} \quad pv \;\leq\; f(v) \;+\; f^*(p) \;. \tag{2.2}$$

La démonstration est immédiate en écrivant

$$pv - f(v) \leq \operatorname*{Sup}_{w \in \mathbb{R}} \,(pw - f(w)) \;=\; f^*(p)$$

On peut définir de la même façon

$$f^{**}(v) \;=\; \operatorname*{Sup}_{p \in \mathbb{R}} \,(\, pv - f^*(p)) \;, \tag{2.3}$$

et obtenir la majoration

Proposition 2.5 *Pour tout $v \in \mathbb{R}$, $f^{**}(v) \;\leq\; f(v)$.*

Démonstration : On a, d'après l'inégalité de Fenchel (2.2), $pv - f^*(p) \leq f(v)$, d'où le résultat en prenant le "Sup" qui est le plus petit des majorants.

Il y a des cas où cette inégalité est toujours réalisée à l'égalité :

Proposition 2.6 *Soit f une fonction convexe s.c.i. finie en au moins un point. Alors $f^{**} = f$.*

Démonstration : Soit $u \in \mathbb{R}$ et $a < f(u)$. L'épigraphe de f, $A = \{(u, w) \mid w \geq f(u)\}$ est un convexe fermé du plan, et le point (u, a) en est extérieur. Il existe donc une droite qui les sépare (ceci est une application bien triviale du théorème de Hahn-Banach) c'est à dire

$$\exists p \in \mathbb{R} \;\; \exists \epsilon > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R} \qquad p(v-u) \;+\; a \;+\; \epsilon \;\leq\; f(v) \;.$$

On a donc pour tout $v \in \mathbb{R}$, $pv - f(v) \leq pu - a$. On prend le "Sup" en $v \in \mathbb{R}$. Il vient $f^*(p) \leq pu - a$, ou encore

$$a \;\leq\; pu \;-\; f^*(p) \;\leq\; f^{**}(u) \;,$$

en utilisant l'inégalité de Fenchel. Ceci est vrai pour tout $a < f(u)$, d'où en passant au "Sup" (en a), $f(u) \leq f^{**}(u)$. On en déduit le résutlat compte tenu de la proposition précédente.

3 La formule de Hopf et Lax

On considère la classe des solutions u de l'équation

$$u_t \;+\; f(u)_x \;=\; 0 \;, \tag{3.1}$$

satisfaisant à la condition initiale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x, 0) = \; u_0(x) \tag{3.2}$$

$u(x,0) = u_0(x)$, pour u_0 suffisamment régulière et à support compact. Cette hypothèse est susceptible de généralisations (elles seront faites plus loin, dans un autre chapitre) mais elle permet ici de rendre possible la démarche. On pose

$$v(x,t) \ = \ \int_0^x \ u(\xi,t)\, d\xi \ , \ \ v_0(x) \ = \ \int_0^x \ u_0(\xi)\, d\xi \ ,$$

et la fonction v vérifie l'équation

$$v_t \ + \ f(v_x) \ = \ 0 \ \ , \ \ v(x,0) \ = \ v_0(x) \ . \tag{3.3}$$

En effet, dans (3.1), la fonction f n'est définie qu'à une constante additive près. Le choix 0 au second membre de (3.3) corresond effectivement à un choix particulier de cette constante.

On suppose $f \in C^2(\mathbb{R})$, convexe. Le but de cette section est de montrer que parmi les éléments de la classe des solutions de (3.1), (3.2), on peut sélectionner une solution vérifiant la **Formule de Hopf et Lax**,

$$v(x,t) \ = \ \operatorname*{Inf}_{x_0 \in \mathbb{R}} \left(v_0(x_0) \ + \ t\, f^*\!\left(\frac{x - x_0}{t}\right)\right) \ , \tag{3.4}$$

et que l'on considerera ensuite comme la seule physiquement acceptable.

Soit v une solution de (3.1), (3.2) ; pour un paramètre $p \in \mathbb{R}$ (qui peut dépendre de x et t), on pose $v_x \ = \ p \ + \ v_x \ - \ p$, d'où le développement de Taylor

$$f(v_x) \ = \ f(p) \ + \ (v_x - p)\, f'(p) \ + \ \frac{(v_x - p)^2}{2}\, f''(q),$$

pour q entre p et v_x. En ajoutant v_t, il vient, sachant (3.3),

$$0 = v_t + f(v_x) = v_t + f'(p) v_x \ - \ (p f'(p) - f(p)) \ + \ \frac{(v_x - p)^2}{2}\, f''(q) \ ,$$

d'où

$$v_t \ + \ f'(p)\, v_x \ = \ p f'(p) - f(p) \ - \ \frac{(v_x - p)^2}{2}\, f''(q) \ . \tag{3.5}$$

Dans (3.5), on a $\frac{1}{2}(v_x - p)^2 f''(q) \geq 0$, et on va rechercher une solution maximale, satisfaisant

$$v_t \ + \ f'(p)\, v_x \ = \ p\, f'(p) - f(p) \ , \tag{3.6}$$

et la condition initiale v_0. On peut résoudre (3.6) par les caractéristiques ; soit $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, on note $\xi = \xi(s)$ la caractéristique reliant le point $(x_0, 0)$ au point (x,t), avec $0 < s < t$. On a donc

$$\begin{gathered} \xi'(s) \ = \ f'(p), \\ v'(s) \ = \ p f'(p) - f(p), \\ \xi(0) = x_0, \\ \xi(t) = x. \end{gathered}$$

Or f' est monotone croissante ; on note g sa fonction inverse : $g(f'(p)) = p$. En particulier $g(\xi'(s)) = p$. En intégrant $v'(s)$ le long de la caractéristique, on obtient

$$v(x,t) \ = \ v(x_0, 0) \ + \ \int_0^t \ (p f'(p) - f(p))\, ds \ ,$$

d'où

$$v(x,t) \;=\; v(x_0,0) \;+\; \int_0^t \; (\xi'(s)\, g(\xi'(s)) \;-\; f(g(\xi'(s))))\; ds\;. \tag{3.7}$$

Etant donné x_0 fixé (pour l'instant), on va chercher à minimiser v dans (3.7) sur l'ensemble des trajectoires admissibles, allant de $(x_0,0)$ à (x,t). Si la trajectoire minimale est notée $\xi_*(s)$, toute trajectoire est de la forme $\xi(s) = \xi_*(s) + \epsilon r(s)$, où $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $r = r(s)$ est une fonction réalisant $r(0) = 0,\; r(t) = 0$. On aura $\xi' = \xi_*' + \epsilon r'$, et

$$v(x,t) \;=\; v(x_0,0) \;+\; \int_0^t (g(\xi_*' + \epsilon r')(\xi_*' + \epsilon r') - f \circ g(\xi_*' + \epsilon r'))\; ds\;.$$

On dérive par rapport à ϵ, et on écrit que le minimum est réalisé pour $\epsilon = 0$. Il vient

$$0 = \int_0^t \; (g'(\xi_*')r'\xi_*' \;+\; g(\xi_*')r' \;-\; f' \circ g(\xi_*')g'(\xi_*')r')\; ds\;.$$

Après simplifications, il reste

$$\int_0^t \; g(\xi_*'(s))\; r'(s)\; ds \;=\; 0\;,$$

pour toute fonction r telle que $r(0) = r(t) = 0$. On intègre par parties pour obtenir

$$[g(\xi_*'(s))\; r(s)]_{s=0}^{s=t} \;-\; \int_0^t \; \frac{d}{ds}\Big(g(\xi_*')\Big)\; r(s)\; ds \;=\; 0\;,$$

et ceci pour tout r tel que $r(0) = r(t) = 0$, d'où

$$\frac{d}{ds}\; (g(\xi_*'(s))) \;=\; 0\;.$$

En intégrant, on obtient

$$g(\xi_*'(s)) \;=\; A \;\;, constante, \quad donc \quad \xi_*'(s) = f'(A),\; constante.$$

On intègre encore : $\xi_*(s) = f'(A)s + B$. Or $\xi_*(0) = x_0$, d'où $B = x_0$, et $\xi_*(t) = x$, et on en déduit

$$f'(A) \;=\; \frac{x - x_0}{t}\;. \tag{3.8}$$

On insère cette valeur dans la solution optimale, correspondant à $\xi = \xi_*$, ce qui donne

$$v(x,t) \;=\; v(x_0,0) \;+\; \int_0^t (g(\xi_*')\xi_*' - \; f \circ g(\xi_*'))\; ds\;,$$

ou encore

$$v(x,t) = v(x_0,0) + \int_0^t \; (g(f'(A))\; f'(A) \;-\; f \circ g(f'(A)))\; ds\;,$$

puis

$$v(x,t) = v(x_0,0) \;+\; t(Af'(A) - f(A)) \;=\; v(x_0,0) \;+\; t\; f^*(f'(A)),$$

en tenant compte de la Proposition 2.3. D'après (3.8), on a en fait obtenu

$$v(x,t) \;=\; v(x_0,0) \;+\; t\, f^*(\frac{x-x_0}{t})\,.$$

Il reste à minimiser suivant le paramètre x_0 pour obtenir la formule de Hopf et Lax (3.4).

La démarche inverse reprend les arguments adoptés pour l'exemple de la section 1, sans aucune difficulté particulière.

La formule de Hopf et Lax permet d'exhiber une solution particulière de (3.3), dans le cas où f est convexe et lorsque le problème est posé sur $\mathbb{R}$ tout entier, sans pouvoir imposer des conditions aux limites. Il s'agit là d'hypothèses très réductrices, qui seront levées dans le chapitre suivant. Elle permet cependant de prendre en compte des solutions discontinues, et se généralise facilement au cas où la condition initiale u_0 n'est plus nécéssairement à support compact. La section suivante présente un exemple important de l'exploitation de la formule de Hopf et Lax, dans le cas de l'équation de Burgers.

4 Le problème de Riemann pour l'équation de Burgers

On se donne deux constantes réelles notées u_g et u_d, et on considère le problème

$$u_t \;+\; (\frac{u^2}{2})_x \;=\; 0\,, \tag{4.1}$$

avec la condition initiale

$$u(x,0) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x<0\,, \\ u_d & si\ x>0\,. \end{cases} \tag{4.2}$$

Le problème (4.1), (4.2) correspond au problème de Riemann. Il est caractérisé par une donnée initiale constante par morceaux, n'admettant qu'une seule discontinuité à l'origine. Ce problème est très important pour les applications numériques.

En introduisant une fonction v telle que $u = v_x$, on aboutit au problème

$$v_t \;+\; \frac{(v_x)^2}{2} \;=\; 0 \tag{4.3}$$

avec la condition initiale

$$v(x,0) \;=\; \begin{cases} u_g x & si\ x<0\,, \\ u_d x & si\ x>0\,. \end{cases}$$

La formule de Hopf et Lax conduit à la solution

$$v(x,t) \;=\; \mathrm{Min}\left(\underset{y<0}{\mathrm{Inf}}\{u_g y + \frac{(x-y)^2}{2t}\},\ \underset{y>0}{\mathrm{Inf}}\{u_d y + \frac{(x-y)^2}{2}\} \right) \tag{4.4}$$

Nous allons expliciter cette solution. On a

$$\underset{y<0}{\mathrm{Inf}}\{u_g y + \frac{(x-y)^2}{2t}\} \;=\; \begin{cases} \frac{x^2}{2t} & si\ x>u_g t\,, \\ u_g x \;-\; \frac{u_g^2 t}{2} & si\ x<u_g t\,, \end{cases}$$

et

$$\operatorname*{Inf}_{y>0}\{u_d y + \frac{(x-y)^2}{2t}\} \;=\; \begin{cases} \frac{x^2}{2t} & si\ x < u_d t \ , \\ u_d x \;-\; \frac{u_d^2 t}{2} & si\ x > u_d t \ . \end{cases}$$

Pour $u_g < u_d$, on recense trois zones :

Si $x < u_g t$, alors $v(x,t) \;=\; \mathrm{Min}(u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}, \frac{x^2}{2t}) \;=\; u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}$.

Si $u_g t < x < u_d t$, alors $v(x,t) \;=\; \frac{x^2}{2t}$.

Si $u_d t < x$ alors $v(x,t) = \mathrm{Min}(u_d x - \frac{u_d^2 t}{2}, \frac{x^2}{2t}) = u_d x - \frac{u_d^2 t}{2}$.

Ceci conduit à la solution suivante pour u, toujours dans le cas $u_g < u_d$,

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x < u_g t \ , \\ \frac{x}{t} & si\ u_g t < x < u_d t, \\ u_d & si\ x > u_d t \ . \end{cases} \tag{4.5}$$

Il s'agit d'une solution régulière correspondant à une onde de détente.

Pour $u_g > u_d$, on recense quatre zones.

Si $x < u_d t$, alors $x < u_g t$ et donc $v(x,t) \;=\; \mathrm{Min}(u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}, \frac{x^2}{2t}) \;=\; u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}$.

Si $u_d t < x < \frac{u_d + u_g}{2} t$, alors $v(x,t) = \mathrm{Min}\{u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}, u_d x - \frac{u_d^2 t}{2})$, et donc $v(x,t) = u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}$.

Si $\frac{u_d + u_g}{2} t < x < u_g t$, alors $v(x,t) = \mathrm{Min}\{u_g x - \frac{u_g^2 t}{2}, u_d x - \frac{u_d^2 t}{2})$, et donc $v(x,t) = u_d x - \frac{u_d^2 t}{2}$.

Si $x > u_g t$, alors $v(x,t) = \mathrm{Min}(u_d x - \frac{u_d^2 t}{2}, \frac{x^2}{2t}) = u_d x - \frac{u_d^2 t}{2}$.

Il n'y a effectivement que deux valeurs possibles pour v. Notons que v est continue, et vaut $\frac{1}{2} u_g u_d t$ le long de la droite $x = \frac{1}{2}(u_g + u_d)t$. Ceci conduit à la solution suivante pour u, qui est dicontinue le long de la droite $x = \frac{1}{2}(u_g + u_d)t$,

$$u(x,t) \;=\; \begin{cases} u_g & si\ x \;<\; \frac{u_g + u_d}{2}\ t \ , \\ u_d & si\ x \;>\; \frac{u_g + u_d}{2}\ t \ . \end{cases} \tag{4.6}$$

Il s'agit d'une solution de type "onde de choc", et l'intérêt de la formule de Hopf et Lax est de nous avoir préciser la trajectoire du choc.

5 Conclusion

La formule de Hopf et Lax sélectionne et caractérise une (seule) solution physiquement acceptable, qui peut comporter des discontinuités. Elle n'est applicable que pour f convexe, et on peut construire une formule analogue pour f concave. Dans le cas général, on sélectionne effectivement la solution associée à f^{**} et non plus à f. L'hypothèse minimale sur la condition initiale est liée au comportement de f^* à l'infini. En général, si u_0 est bornée, donc v_0 Lipschitzienne, la formule (3.4) caractérise bien une solution.