Université Montpellier II

ULMA102, Biomaths1
1er semestre 2004-2005

Feuille 4

1 Modèles discrets

Exercice 1 Division cellulaire.

1. Un organisme se développe par division cellulaire avec un temps de division T supposé constant et un nombre N_0 de cellules à $t = 0$. Quelle relation de récurrence vérifie le nombre $N_n = N(nT)$ de cellules à l'instant nT ? En déduire l'expression de N_n en fonction de n et N_0, puis $N(t) = N_0 2^{\frac{t}{T}}$ (pour t un multiple de T).

2. Ce modèle est assez grossier : si l'on observe vraiment l'organisme, on ne voit pas des divisions cellulaires simultanées (qui auraient lieu toutes les T secondes); les temps de division ne sont pas si réguliers. On constate davantage une règle du genre : "pendant un intervalle de temps Δt assez court, l'accroissement du nombre ΔN de cellules est proportionnel à N et à Δt" ; autrement dit :
$$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = rN(t)\Delta t \qquad (1)$$
(r est appelé "taux de croissance"). Montrer alors que $N(n\Delta t) = (1 + r\Delta t)^n N_0$. En déduire que, pour t multiple de Δt, $N(t) = N_0 e^{\ln(1+r\Delta t)\frac{t}{\Delta t}}$. Quelle est la limite de cette expression, lorsque Δt tend vers 0 et t est fixé?

3. On suppose toujours (1). Montrer alors que la fonction $N(t)$ est dérivable et et vérifie l'équation différentielle $y' = ry$. Un commentaire?

Exercice 2 La population d'un pays est supposée constante et égale à $S = 50$ millions d'habitants ; au temps $t = 0$, elle se répartit en une population rurale R_0 de 40 millions de personnes et une population urbaine U_0 de 10 millions de personnes. Des mouvements de population ont lieu entre ruraux et urbains et on admet qu'ils satisfont à la règle suivante : "chaque année, 20% de la population rurale devient urbaine et 10% de la population urbaine devient rurale".

1. Mettre en équation le modèle : on considérera deux variables R (pour rurale) et U (pour urbaine) exprimées en fonction de la variable temps n (en années ; $n \in \mathbb{N}$). Notant a et b les taux d'exodes rural et urbain respectivement, montrer que :
$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= -aR_n + bU_n; \\ U_{n+1} - U_n &= aR_n - bU_n; \\ R_n + U_n &= S. \end{aligned}$$

2. Quelle relation de récurrence vérifie la suite (R_n) ? En déduire l'expression de R_n en fonction de n (on pourra chercher la solution sous la forme $R_n = kg^n + h$), puis celle de U_n. Etudier la convergence de ces suites et interpréter.

3. Comment le modèle se modifie-t-il dans le cas d'un bilan "continu"? Prenant l'année comme unité de temps, les taux instantannés d'exode rural et urbain, supposés constants (c'est là l'hypothèse de base du modèle) seront encore notés $a = 0,2$ an^{-1} et $b = 0,1$ an^{-1} respectivement. On montrera que $R(t)$ vérifie l'équation différentielle
$$y' = -(a + b)y + bS.$$

2 Equations différentielles d'ordre 1 à coefficients constants

Exercice 3 On considère une équation chimique réversible du premier ordre: un composé A peut se transformer (dans le rapport d'une molécule pour une molécule) en un composé B, et B lui-même peut se re-transformer en A; on note $c_A(t)$ et $c_B(t)$ les concentrations de A et B au temps t (tout se passe à volume constant).

i) Montrer que $c_A + c_B$ est une fonction constante.

On suppose que, entre deux instants t et $t + \Delta t$ (Δt petit), la quantité de composé A transformée en B est proportionnelle (coefficient noté α) à Δt et à $c_A(t)$ ([1]); de même, entre ces deux instants, la quantité de B transformée en A est proportionnelle (coefficient noté β) à Δt et $c_B(t)$.

ii) Montrer que c_B satisfait l'équation différentielle $c_B'(t) + \beta c_B(t) = \alpha c_A(t)$.

iii) On suppose que, en $t = 0$, on avait 1g/L de composé A et pas de composé B. Montrer que c_B vérifie l'équation $c_B'(t) + (\alpha + \beta)c_B(t) = \alpha$.

iv) Trouver une solution particulière "évidente" de l'équation $y' + (\alpha + \beta)y = \alpha$. En déduire que $c_B(t) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - e^{-(\alpha+\beta)t})$.

v) Tracer les graphes de c_A et c_B, pour différentes valeurs de α et β (en particulier, on étudiera les limites à l'infini, et on regardera ce qui se passe lorsque l'un ou l'autre des paramètres est nul, ou lorsque l'un est très grand par rapport à l'autre).

Exercice 4 L'aleurode des serres, ou *Trialeurodes vapurarium* Westwood, est un insecte qui s'attaque aux cultures en serres. Son cycle de vie comporte 6 stades: un stade d'oeuf, 4 stades larvaires et un stade adulte. Pour lutter contre ce parasite, il est important de connaitre l'évolution des effectifs de chaque stade; cela permet en effet de mettre au point une stratégie optimale d'application de l'insecticide (décider quand et pendant combien de temps épandre le produit), permettant de maintenir la population d'aleurode à des niveaux acceptables en utilisant le moins de produit possible ([2]).
On ne va considérer ici que les deux premiers stades: oeuf et premier stade larvaire. On note $N(t)$ la quantité d'oeuf présents à l'instant t et $L(t)$ la quantité de larves au premier stade à l'instant t. On suppose qu'il y a N_0 oeufs et aucune larve presents à $t = 0$, et on fait les hypothèses suivantes: *entre deux instants t et $t + \Delta t$ très proches, une proportion p_1 d'oeufs meurt, une proportion p_2 d'oeufs passe au premier stade larvaire, une proportion p_3 de larves de premier stade meurt et une proportion p_4 de larves de premier stade passe au deuxième stade.*

i) Montrer que N vérifie l'équation différentielle $N'(t) = -kN(t)$ pour un $k > 0$ qu'on déterminera. Calculer $N(t)$.

ii) Montrer que $L(t)$ vérifie $L'(t) = p_2N(t) - k'L(t)$ pour un $k' > 0$ qu'on calculera. Calculer $L(t)$.

iii) *(Cette question est indépendante des précédentes)* On suppose maintenant que, entre deux instants t et $t + \Delta t$, l'insecticide tue une quantité $Q\Delta t$ d'oeufs (Q est une constante positive). Trouver la nouvelle équation différentielle satisfaite par $N(t)$ et montrer que $N(t) = (N_0 + \frac{Q}{k})e^{-kt} - \frac{Q}{k}$. Tracer $N(t)$ et commenter.

Exercice 5 On considère un modèle Malthusien de population, dans lequel la variation de population est proportionnelle à la population présente; dans un tel modèle, la population N vérifie $N'(t) + kN(t) = 0$, où k est la différence entre le taux de mortalité et le taux de natalité.
On modifie ce modèle de la façon suivante: on se donne une fonction $f(t)$ (qui est donc connue) et, entre les instants t et $t + \Delta t$, en plus de l'évolution naturelle de la population, on "ajoute" une population égale à $f(t)\Delta t$ (attention, si $f(t) < 0$, cet "ajout" est en fait un retrait).

[1] Ceci est une *approximation*, valable uniquement pour Δt petit.

[2] Voir El Shishiny H., Rodolphe F., Optimal chemical control of the Greenhouse Whitefly in *Pest and Pathogen Control: Strategy, Tactics and Policy Models* (Conway, ed.). International Series on Applied System Analysis. Wiley. Chichester.

i) Montrer que N vérifie $N'(t) + kN(t) = f(t)$.

ii) Chercher une solution particulière de $y'(t) + ky(t) = f(t)$ sous la forme $y(t) = g(t)e^{-kt}$. En déduire une expression pour $N(t)$.

iii) On suppose que $f(t) = t$. Quelle(s) donnée(s) manque-t-il pour calculer $N(t)$? En supposant cette (ces) donnée(s) connue(s), calculer $N(t)$ *(on pourra chercher une primitive de te^{kt} sous la forme $(\alpha t + \beta)e^{kt}$).*

Exercice 6 Calculer les primitives de $f(x) = (x+a)^{-1}$, $g(x) = (x-1)^{-2}$, $h(x) = \cos(2x) - 2x\sin(x^2)$ *(on pourra remarquer que $2x$ est la dérivée de x^2)*, $i(x) = e^x \cos(2x)$ *(on pourra chercher une primitive sous la forme $e^x(A\cos(2x) + B\sin(2x))$, ou bien, pour les plus courageux, utiliser l'exponentielle complexe...).*

Exercice 7 Résoudre les équations différentielles suivantes:

i) $y' + y = \cos(2t)$, $y(0) = 2$.

ii) $y' + 3y = t$, $y(0) = \pi$.

iii) $y' + e^5 y = 3 + t^2$, $y(0) = 0$.

iv) $y'' = 3$. Quels renseignements vous sont nécessaires pour calculer entièrement y?

3 Equations différentielles linéaires d'ordre 1, cas général

Exercice 8 Nous ne sommes pas encore satisfaits par le modèle de Malthus pour les populations, aussi nous allons encore le modifier. On considère maintenant que les taux de natalité et de mortalité dépendent du temps: k est donc une fonction de t (modélisant par exemple le fait que, grâce aux progrès de la médecine au cours du temps, la natalité peut augmenter tandis que la mortalité peut baisser), et N vérifie l'équation

$$y'(t) + k(t)y(t) = 0. \tag{2}$$

i) Montrer que cette équation est encore linéaire.

ii) Soit y satisfaisant (2). Chercher une fonction H telle que $e^{H(t)}y(t)$ vérifie une équation différentielle plus simple que y. En déduire que toutes les solutions de (2) sont de la forme $y(t) = Ce^{-K(t)}$ avec C constante et K une primitive de k.

iii) Donner une expression de N en fonction de la population initiale N_0.

iv) Comme dans l'exercice 5, on modifie maintenant la population par un apport extérieur $f(t)$. Que doit vérifier la fonction $C(t)$ pour que $y(t) = C(t)e^{-K(t)}$ soit une solution particulière de $y'(t) + k(t)y(t) = f(t)$? En déduire la forme de toutes les solutions de cette équations, et une expression pour N.

v) Tracer la courbe N lorsque $k(t) = 1/(1+t)$ et $f(t) = 1$.

vi) A votre avis, de quoi n'avons-nous pas tenu compte dans k et quelle forme générale k devrait-il plutôt avoir *(on rappelle que k est la différence entre le taux de mortalité et le taux de natalité)*?

Exercice 9 Résoudre les équations différentielles suivantes:

i) $y'(t) + ty(t) = 2t$, $y(0) = 1$.

ii) $y'(t) + \cos(t)y(t) = \cos(t)$, $y(1) = 4$.

iii) $y'(t) + \frac{2t}{1+t^2}y(t) = t^3$, $y(0) = 0$.

4 Equations différentielles non-linéaires d'ordre 1

Exercice 10 On considère un modèle d'épidémie: A représente la population non infectée, B la population infectée totale et C la population infectée depuis le début de l'épidémie (i.e. $t = 0$). On note a la quantité initiale de A, b la quantité initiale de B et $y(t)$ la quantité de C à l'instant t.

i) Que vaut $y(0)$? Exprimer, en fonction de a, b et $y(t)$, les concentrations de A et B à l'instant t.

On suppose que, entre t et $t + \Delta t$, la quantité de A qui deviennent infectés est proportionnelle (coefficient $k > 0$) à Δt et au produit des quantités de A et B à l'instant t.

ii) Donner des justifications à cette hypothèse. Que se passe-t-il si a ou b est nul? On suppose, à partir de maintenant, que a et b sont non nuls.

iii) Montrer que y vérifie $y'(t) = k(a - y(t))(b + y(t))$. Vérifier que, en général, cette équation n'est pas linéaire (on pourra développer le produit).

iv) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue (I intervalle de $\mathbb{R}$) et F une primitive de f. On suppose qu'une fonction $h : \mathbb{R} \to I$ vérifie $h'(t)f(h(t)) = k$. Que peut-on dire sur $F(h(t))$?

v) On suppose $b = -a$ *(cas purement théorique, donc...)*. Calculer une primitive de $\frac{1}{(a-x)^2}$ et en déduire $y(t)$.

vi) On suppose que $a \neq -b$. Chercher α et β tels que, pour tout x différent de a et $-b$, on ait

$$\frac{1}{(a - x)(b + x)} = \frac{\alpha}{a - x} + \frac{\beta}{b + x}.$$

En déduire une primitive de $1/((a - x)(b + x))$ et calculer $y(t)$.

vii) Etudier, dans le cas $a \neq -b$, la limite de $y(t)$ lorsque $t \to \infty$. Que cela signifie-t-il en ce qui concerne A, B et C? Quelle signification a, dans le modèle présent, $y'(t)$? On tracera aussi cette courbe.

Exercice 11 On considère le modèle de croissance Gompertz: une population N d'individus vérifie $y'(t) = -ay(t) \ln\left(\frac{y(t)}{K}\right)$ (K est la capacité biotique du milieu).

i) Commenter ce modèle (on pourra par exemple chercher un équivalent du taux de croissance).

ii) Quelle équation vérifie $w(t) = \ln(N(t))$? Résoudre cette équation puis calculer et tracer $N(t)$ (on supposera que N_0 est strictement compris en 0 et K). Que se passe-t-il si $N_0 > K$?

Exercice 12 Trouver une solution à chacune des équations suivantes:

i) $y'(t) = y(t)^2$, $y(0) = 1$.

ii) $y'(t) = \frac{1+y(t)^2}{2y(t)}$, $y(0) = 5$.

iii) $y'(t) = \frac{t^2}{\cos(y(t))}$, $y(0) = 0$.

5 Extraits de sujets d'examen

Exercice 13 *(durée conseillée: 1h.)*
On considère deux récipients, A et B, remplis d'eau et en contact le long d'une paroi osmotique. Dans le récipient A, on a une quantité $a(t)$ d'un produit chimique (cette quantité est supposée connue: l'expérimentateur la contrôle entièrement et peut la faire varier au cours du temps).

a) Au début de l'expérience, le récipient B ne contient pas de produit chimique mais la paroi osmotique permet le passage du produit de A vers B selon le modèle suivant: entre deux instants t et $t + \Delta t$, la quantité de substance qui passe de A vers B est proportionnelle à Δt et à la différence entre les quantités de substance dans A et B à l'instant t.

On note $y(t)$ la quantité de produit dans B à l'instant t.

i) Montrer que $y(t)$ vérifie l'équation différentielle $y'(t) = -ky(t) + ka(t)$, où k est une constante dont on précisera le sens.

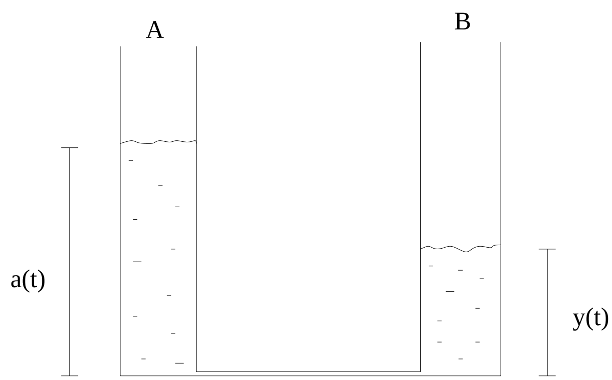
ii) On suppose $a(t) = t$. Calculer $y(t)$; tracer, sur un même graphe, $a(t)$ et $y(t)$ et commenter *(on fera en particulier attention aux positions relatives de $a(t)$ et $y(t)$ (quelle fonction est la plus grande, etc...), et on pourra étudier la limite quand $t \to +\infty$ de $a(t) - y(t)$).*

b) On suppose maintenant que $a(t) = 0$ mais que B contient, à l'instant initial, du produit: $y(0) = y_0 > 0$. On propose de plus un autre modèle pour l'équation régissant l'évolution de $y(t)$: $y'(t) = \frac{-ky(t)}{1+y(t)}$.

i) Commentez ce nouveau modèle *(on pourra en particulier considérer les cas où $y(t)$ est petit et les cas où $y(t)$ est grand, et essayer de voir ce que cela signifie en ce qui concerne les capacités osmotiques de la paroi).*

ii) Montrer que $y(t)$ vérifie $\ln|\frac{y(t)}{y_0}| + y(t) - y_0 = -kt$. Si on suppose que $y(t)$ a une limite quand t tend vers $+\infty$, quelle est cette limite?

Exercice 14 *(durée conseillée: 1h.)*
On considère deux tubes creux A et B, reliés entre eux par un petit canal.



On introduit dans le tube A un liquide et on note $a(t)$ la hauteur, à l'instant t, de liquide dans A et $y(t)$ la hauteur, à l'instant t, de liquide dans B. La hauteur de liquide dans le tube A est supposée totalement maitrisée: $a(t)$ est une fonction choisie par l'expérimentateur, et donc considérée comme connue (au besoin, on rajoute ou on enlève en continu du liquide dans A de sorte que sa hauteur soit bien $a(t)$ à l'instant t). On cherche à déterminer $y(t)$.

a) Au début de l'expérience, le récipient B ne contient pas de liquide mais le canal permet le passage du liquide de A vers B selon la loi suivante: entre deux instants t et $t + \Delta t$, la hauteur de liquide qui passe de A vers B est proportionnelle à Δt et à la différence entre les hauteurs de liquide dans A et B à l'instant t.

i) Montrer que $y(t)$ vérifie l'équation différentielle $y'(t) = -ky(t) + ka(t)$, où k est une constante dont on précisera le sens.

ii) On suppose $a(t) = 1$. Calculer $y(t)$; tracer, sur un même graphe, $a(t)$ et $y(t)$ et commenter.

b) On suppose maintenant que $a(t) = 0$ mais que B contient, à l'instant initial, du liquide: $y(0) = y_0 > 0$. On propose de plus un autre modèle pour l'équation régissant l'évolution de $y(t)$: $y'(t) = \frac{-ky(t)^2}{1+y(t)^2}$.

i) Commentez ce nouveau modèle *(on pourra en particulier considérer les cas où $y(t)$ est petit et les cas où $y(t)$ est grand).*

ii) Montrer que $y(t)$ vérifie $\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)} + y(t) - y_0 = -kt$. Si on suppose que $y(t)$ a une limite quand t tend vers $+\infty$, quelle est cette limite?