Université de Marne-la-Vallée
Examen de S1 - Mathématiques - 22 janvier 2001
Les calculatrices et les documents sont interdits

Exercice 1 sur 3 points. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x>0 \text{ et } f(0)=1.$$

1) Donner un développement limité de f au voisinage de 0 d'ordre 2. **(1 point)**
2) Prouver que f est continue et dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.**(1 point)**
3) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, et préciser la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de ce point.**(1 point)**

Corrigé
1) D'après le cours, il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$ telle que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)$. On a alors $f(x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon(x)$, ce qui est bien un développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2) La question précédente montre que $\lim\limits_{x\to 0,x>0}f(x)=1$, donc que f est continue en 0, puisque $f(0)=1$. Elle montre aussi que, pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\frac{f(x)-1}{x}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{3}+x\varepsilon(x)$. Ceci implique $\lim\limits_{x\to 0,x>0}\dfrac{f(x)-1}{x}=-\dfrac{1}{2}$, ce qui montre que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$.
3) L'équation de la tangente est $y=f(0)+xf'(0)$ donc $y=1-\frac{x}{2}$. Comme $f(x)-1+\frac{x}{2}=x^2(\frac{1}{3}+\varepsilon(x))$, et qu'il existe $\eta>0$ tel que pour $x<\eta$, $|\varepsilon(x)|\leq\frac{1}{3}$, on a donc, pour $x<\eta$, $f(x)-1+\frac{x}{2}\geq 0$. La courbe est donc située au dessus de sa tangente au voisinage de 0.

Exercice 2 sur 2 points
1) Pour tout $\alpha>0$ et tout $x>0$, exprimer $e^{\alpha x}-e^{\alpha x/2}$ en appliquant le théorème des accroissements finis.**(1 point)**
2) En déduire une preuve que,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{x}=+\infty.$$

(1 point)

Corrigé
1) Le théorème des accroissements finis permet d'écrire, pour tout $x>0$, $e^{\alpha x}-e^{\alpha x/2}=\frac{x}{2}\alpha e^{\alpha c}$, avec $c\in]\frac{x}{2},x[$.
2) On en déduit donc que $e^{\alpha x}-e^{\alpha x/2}\geq\frac{x}{2}\alpha e^{\alpha x/2}$, et donc que $\dfrac{e^{\alpha x}}{x}\geq\dfrac{1}{2}e^{\alpha x/2}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\alpha x/2}=+\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\alpha x}}{x}=+\infty$.

Exercice 3 sur 5 points

1) *Question de cours.* Comment la fonction Arctangente $x \mapsto Arc\tan x$ est-elle définie? Prouver qu'elle est dérivable et que sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.**(1 point)**

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.**(1 point)**

3) Prouver, pour tout x réel, la relation :

$$Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) = Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

(1 point)

4) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = Arc\tan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$.

a) Donner une expression simple de $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.**(1 point)**

b) Prouver que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge et donner sa limite.**(1 point)**

Corrigé

1) La fonction $f \ :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$ est une fonction strictement croissante surjective, donc bijective. La fonction arctan est alors définie comme la fonction réciproque de f, et est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Comme f est continue et dérivable, et que sa dérivée vaut, pour tout $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$, d'après le cours, la fonction réciproque de f est continue, dérivable et $\arctan'(x) = \frac{1}{f'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(x)))^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

2) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0$, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme composée de fonctions dérivables, avec

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{(x^2+x+1)^2}},$$

donc $f'(x) = -\dfrac{2x+1}{1+(x^2+x+1)^2}$.

3) **Première solution** Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y = \arctan x$ et $z = \arctan(x+1)$. On a toujours $\tan y \tan z = x(x+1) \neq -1$. On peut donc écrire

$$\tan(z-y) = \frac{\tan z - \tan y}{1 + \tan z \tan y} = \frac{x+1-x}{1+x(x+1)}.$$

Comme, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction arctan entre les points x et $x+1$, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que $z - y = 1\frac{1}{1+c^2}$, on a $0 < z - y \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, donc

$$z - y = \arctan\frac{1}{1+x+x^2},$$

ce qui est la relation demandée.

Deuxième solution On dérive la fonction

$$x \mapsto Arc\tan(x+1) - Arc\tan(x) - Arc\tan\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right).$$

On remarque que la dérivée est nulle, donc que cette fonction est constante. La valeur $x=0$ montre que la constante est nulle.

4)a) On a, en utilisant 3) pour $x=n$, $s_n = \arctan(n+1) - \arctan 1 = \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$.

b) La limite de (s_n) est donc égale à $\lim_{x\to+\infty} \arctan x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4 sur 7 points. On considère la fonction f définie sur $[0,\infty[$ telle que

$$\begin{aligned} f(x) &= x|\ln(x)| \text{ si } x>0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

1) a) Montrer que f est continue sur $[0,\infty[$.**(1/2 point)**

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,\infty[$ et calculer ses dérivées.**(1/2 point)**

c) Etudier si f est dérivable en 1.**(1/2 point)**

d) Etudier si f est dérivable en 0.**(1/2 point)**

2) Etudier les variations et la convexité ou la concavité de la fonction f.**(1 point)**

Esquisser la courbe d'équation $y=f(x)$.**(1 point)**

3) Donner tous les points fixes de f (toutes les solutions de l'équation $f(x)=x$).**(1 point)**

4) On étudie une suite récurrente satisfaisant la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ si $n\geq 0$ dans les deux cas suivants:

a) $u_0 = 1/4$;**(1 point)**

b) $u_0 = 4$.**(1 point)**

Dans chacun de ces deux cas, préciser si la suite est croissante ou décroissante, puis si elle converge (en déterminant la limite éventuelle).

Corrigé

1)a) La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, comme composée (valeur absolue et logarithme népérien) et produit de fonctions continues. D'après le cours, on a $\lim_{x\to 0} -x\ln x = 0$. La fonction f est donc aussi continue en 0.

b) Pour tout $x\in]0,1[$, $f(x)=-x\ln x$ est une fonction dérivable, et $f'(x) = -\ln x - 1$. Pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f(x)=x\ln x$ est une fonction dérivable, et $f'(x)=\ln x+1$.

c) On a $f(1)=0$, et $\lim_{x\to 1, x>1} \dfrac{f(x)-0}{x-1} = 1$, et $\lim_{x\to 1, x<1} \dfrac{f(x)-0}{x-1} = -1$. La fonction n'est donc pas dérivable en 1, mais possède une dérivée à droite (égale à 1) et une dérivée à gauche (égale à -1).

d) Pour tout $x\in]0,1[$, $\frac{f(x)}{x} = -\ln x$ vérifie $\lim x \to 0 \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

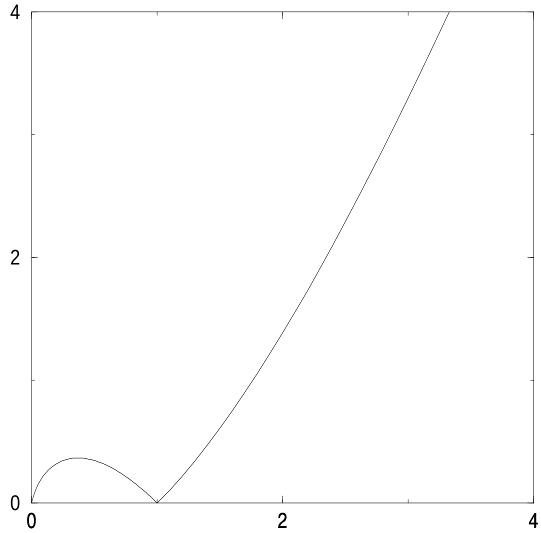
2) On a, pour tout $x\in]0,1[$, $f''(x) = -\frac{1}{x} < 0$, donc la fonction tourne sa concavité vers le bas dans $]0,1[$, et pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f''(x)=\frac{1}{x}>0$, donc la fonction tourne sa concavité vers le haut dans $]1,+\infty[$. La dérivée s'annule

pour $x = \frac{1}{e}$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. La fonction présente donc une branche parabolique tournée vers Oy au voisinage de $+\infty$.

Le tableau de variations est le suivant :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f est la suivante :



Courbe représentative de f

3) La valeur 0 est un point fixe, car $f(0) = 0$. Recherchons les points fixes dans l'intervalle $]0,1[$. On a alors $x = -x \ln x$, ce qui donne $x = \frac{1}{e} \in]0,1[$. Recherchons les points fixes dans l'intervalle $]1,+\infty[$. On a alors $x = x \ln x$, ce qui donne $x = e \in]1,+\infty[$. Il y a donc trois points fixes, 0, $1/e$, et e.

4) On a, pour tout $x \in [0,1/e]$, $1/e \geq f(x) \geq x$. On peut donc montrer par récurrence que, pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1/4 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1/e$. La suite (u_n) est donc croissante majorée. Elle converge, et sa limite l vérifie $1/4 \leq l \leq 1/e$ et $f(l) = l$. Donc $l = 1/e$ qui est le seul point fixe de f dans $[1/4, 1/e]$.

On a, pour tout $x \in]e,+\infty]$, $x < f(x)$. On peut donc montrer par récurrence que, pour la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4 < u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante. Si elle était majorée, elle convergerait, et sa limite $l \in \mathbb{R}$ serait telle que $4 \leq l$ et $f(l) = l$. Or il n'existe pas de tel point fixe pour la fonction f. La suite n'est donc pas majorée et $\lim\limits_{n} u_n = +\infty$.

Exercice 5 sur 3 points

1) Soient a et b deux réels strictement positifs et g la fonction définie sur $]0,\infty[$ par $g(t) = at + \frac{b}{t}$. **J'ai modifié l'énoncé ici :** Montrer que l'image de cette fonction, c'est à dire $\{g(t), t \in]0,\infty[\}$, est $[2\sqrt{ab}, +\infty[$.**(1 point)**

2) 0n considère une fonction f définie sur un intervalle $I =]A,+\infty[$ et deux fois dérivable sur cet intervalle. On suppose que les fonctions f et f" bornées et l'on note

$$\sup\{|f(x)|; x \in I\} = M_0 \text{ et } \sup\{|f"(x)|; x \in I\} = M_2.$$

Prouver (à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange) que, pour tout $x \in I$ et tout $t > 0$,

la rédaction ci-dessous résulte naturellement de mes calculs (voir solution); la relation initiale demande de changer t en 1/t : qu'en pensez-vous ?

$$|f'(x)| \leq t\frac{M_2}{2} + \frac{2M_0}{t}.$$

(1 point)

En déduire

$$\sup\{|f'(x)|; x \in I\} = M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

(1 point)

Corrigé

1) Etudions la fonction g, qui est continue et dérivable sur $]0, \infty[$. On a $g'(t) = a - \frac{b}{t^2}$, négative pour $t \in]0, \sqrt{b/a}[$, positive pour $t \in]\sqrt{b/a}, +\infty[$. Donc g atteint son minimum $2\sqrt{ab}$ au point $\sqrt{b/a}$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, on en déduit que $\{g(t), t \in]0, \infty[\} = [2\sqrt{ab}, +\infty[$.

2) La formule de Taylor-Lagrange permet d'écrire que, pour tout $x \in I$, pour tout $t > 0$, il existe $c \in]x, x+t[$ tel que $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + \frac{t^2}{2} f''(c)$. Donc

$$f'(x) = \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \frac{t}{2} f''(c),$$

ce qui donne

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+t)| + |f(x)|}{t} + \frac{t}{2}|f''(c)| \leq t\frac{M_2}{2} + \frac{2M_0}{t}.$$

La relation précédente étant vérifiée pour tout $t > 0$, elle est donc vraie pour $t = \sqrt{\frac{4M_0}{M_2}}$ (valeur qui donne le miminum du membre de droite d'après la question 1)), ce qui donne $|f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$. La relation étant vraie pour tout $x \in I$, on a donc $\sup\{|f'(x)|; x \in I\} \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.