Examen de DEA,
“Solutions variationnelles et solutions de viscosité pour EDP”

16 avril 2003, 3h, tous documents autorisés.

Exercice 1. Le propos de cet exercice est de trouver des estimations *a priori* sur les solutions de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}(a(u)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega\,, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{0.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$ pour éviter les problèmes d'injection de Sobolev de H^1 en dimension 2), $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue minorée par $c > 0$ et bornée, et $f \in L^q(\Omega)$ avec $q \in]1, \frac{2N}{N+2}[$.
On suppose, dans un premier temps, $f \in L^2(\Omega)$, on note u une solution variationnelle $H^1_0(\Omega)$ de (0.1) (on sait par le cours qu'une telle solution existe) et on cherche donc à obtenir des estimations sur u *ne dépendant que de* $||f||_{L^q(\Omega)}$. La technique est similaire à celle employée pour les seconds membres mesures.

1. (*Inégalité-clef*) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe C_0 ne dépendant que de c, α et $||f||_{L^q(\Omega)}$ tel que

$$\int_\Omega |\nabla(\psi(u))|^2 \leq C_0 \left(\int_\Omega (1 + |u|)^{\alpha q'}\right)^{1/q'} + C_0$$

où $\psi(t) = \int_0^t (1 + |s|)^{\frac{\alpha-1}{2}}\, ds$ *(On pourra essayer de prendre une fonction test, dans la formulation variationnelle de (0.1), de la forme* $\varphi(u)$ *avec* $\varphi(t) = \int_0^t (1 + |s|)^\beta\, ds$ *pour un* β *bien choisi.)*.

2. (*Estimation sur* u)

   a) Montrer que $|\psi(t)| \geq C_1(1 + |t|)^{\frac{\alpha+1}{2}} - C_1$, où $C_1 > 0$ ne dépend que de α, et en déduire que

   $$\left(\int_\Omega (1 + |u|)^{\frac{N(\alpha+1)}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{N}} \leq C_3 \left(\int_\Omega (1 + |u|)^{\alpha q'}\right)^{1/q'} + C_3$$

   où C_3 ne dépend que de c, α et $||f||_{L^q(\Omega)}$.

   b) Montrer que $1/q' < (N - 2)/N$. En déduire que, si l'on prend $\alpha > 0$ tel que $\frac{N(\alpha+1)}{N-2} = \alpha q'$, on a une borne sur $\int_\Omega |u|^{\alpha q'}$ qui ne dépend que de c et $||f||_{L^q(\Omega)}$.

   c) Montrer que $||u||_{L^{\frac{Nq}{N-2q}}(\Omega)} \leq C_4$ et que, avec le α comme en b),

   $$\int_\Omega |\nabla(\psi(u))|^2 = \int_\Omega (1 + |u|)^{\alpha-1}|\nabla u|^2 \leq C_4$$

   avec C_4 ne dépendant que de c et $||f||_{L^q(\Omega)}$.

3. (*Estimation sur* ∇u) Soit $m \in]0, 2[$. En utilisant le α pris en 2.b), montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u|^m \leq C_5 \left(\int_\Omega (1 + |u|)^{\frac{m(1-\alpha)}{2-m}}\right)^{\frac{2-m}{2}}$$

où C_5 ne dépend que de c et $||f||_{L^q(\Omega)}$. En déduire une estimation sur u dans $W_0^{1,\frac{Nq}{N-q}}(\Omega)$.

4. (*Construction d'une solution* u) On suppose maintenant uniquement $f \in L^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une solution à (0.1) au sens

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,\frac{Nq}{N-q}}(\Omega)\,, \\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\,, \displaystyle\int_\Omega a(u)\nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \end{array} \right. \tag{0.2}$$

Exercice 2. On cherche à résoudre le problème suivant :

$$(\mathrm{PCB}) \left\{ \begin{array}{ll} F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \langle n(x), Du(x)\rangle + \alpha u(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega, \end{array} \right.$$

où α est une constante positive, Ω est un ensemble ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ (nous serons plus précis plus tard) et $n(x)$ désigne la normale unitaire sortante de Ω en $x \in \partial\Omega$.

Un contre-exemple. Nous allons commencer par montrer sur un exemple simple que l'on ne peut pas espérer avoir une solution de viscosité en imposant simplement la condition de bord ponctuellement. Considérons donc le cas où $\Omega =]0,1[$ et :

$$(\mathrm{EDO})_\epsilon \left\{ \begin{array}{ll} -\epsilon u_\epsilon''(x) + u_\epsilon'(x) + u_\epsilon(x) = x + 1 & \text{pour } x \in]0,1[, \\ u_\epsilon'(0) = u_\epsilon'(1) = 0. \end{array} \right.$$

Cette EDO est bien une EDP elliptique avec condition “au bord” du type ci-dessus.

1. Résoudre cette équation (histoire que vous ne perdiez pas de temps bêtement : chercher une solution particulière sans les conditions au bord, déterminer la solution générale de l'équation sans second membre et ajuster les constantes).

2. Montrer que u_ϵ converge uniformément vers une fonction u qui vérifie :

$$(\mathrm{EDO}) \left\{ \begin{array}{ll} u'(x) + u(x) = x + 1 & \text{pour } x \in]0,1[, \\ u'(0) = 0, \end{array} \right.$$

   mais $u'(1) \neq 0$. Qu'en concluez-vous ?

Solutions de viscosité pour (PCB). Comme pour le mouvement par courbure moyenne, il nous faut adapter la notion de solution de viscosité à la situation. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *sous-solution de* (PCB) si u est semi-continue supérieurement et si :

$$\begin{array}{r} \forall x \in \Omega, \forall (p, A) \in D^{2,+}u(x), F(A, p, u(x), x) \leq 0 \\ \forall x \in \partial\Omega, \forall (p, A) \in D^{2,+}u(x), F(A, p, u(x), x) \leq 0 \; \boxed{\text{ou}} \; \langle n(x), p\rangle + \alpha u(x) \leq 0. \end{array}$$

3. Proposer une définition de sur-solution pour (PCB).

4. Vérifier que la fonction u du contre-exemple est bien une solution de viscosité en ce sens.

Les hypothèses. Nous énonçons maintenant les hypothèses dont nous aurons besoin pour montrer un principe de comparaison.

(H1). $\exists \gamma > 0, \forall r, s \in \mathbb{R}, r \geq s, \forall (x, p, A) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}_n, \gamma(r - s) \leq F(A, p, r, x) - F(A, p, s, x)$;

(H2). Il existe un module de continuité ω tel que:

$$\left. \begin{array}{r} -3\kappa \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix} \leq 3\kappa \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \\ x, y \in \overline{\Omega}, r \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^n, X, Y \in \mathcal{S}_n \end{array} \right\}$$
$$\Rightarrow F(B, p, r, y) - F(A, p, r, x) \leq \omega(\kappa|x - y|^2 + |x - y|(|p| + 1));$$

(H3). Il existe V, un voisinage relatif de $\partial\Omega$ dans Ω, tel que :

$$\forall x \in V, \forall r \in \mathbb{R}, \forall p, q \in \mathbb{R}^n, \forall A, B \in \mathcal{S}_n \ : |F(A,p,r,x) - F(B,q,r,x)| \leq \omega(|p-q| + \|A-B\|);$$

(H4). $\exists r > 0, \forall y \in \overline{\Omega}, \forall x \in \partial\Omega, \langle n(x), y-x \rangle \leq \frac{1}{2r}|y-x|^2$;

(H5). L'ouvert Ω est de classe C^1.

Les deux premières hypothèses ressemblent beaucoup à celles du cours. La différence est que l'on renforce un peu la seconde. La troisième hypothèse impose de la continuité uniforme à F en (p, A) au voisinage du bord. La quatrième est une hypothèse géométrique sur le bord ; elle est vérifiée par les ouverts satisfaisant la condition de la sphère extérieure (pour ceux qui connaissent). Enfin la dernière implique en particulier que la $x \mapsto n(x)$ est continue et qu'il existe une fonction positive $\phi \in \mathsf{C}^2(\overline{\Omega})$ telle que : $\forall x \in \partial\Omega$, $\langle n(x), D\phi(x) \rangle \geq 1$.

Principe de comparaison. On va montrer que sous ces hypothèses, toute sous-solution u de (PCB) est majorée par toute sur-solution v de (PCB). Considérons donc deux telles semi-solutions.

5. Après avoir remarqué que l'on peut supposer que ϕ est à support dans V, montrer que pour une constante C_ϵ bien choisie, la fonction $u^\epsilon := u - \epsilon\phi - C_\epsilon$ est sous-solution de :

$$(\text{PCB})^\epsilon \begin{cases} F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \langle n(x), Du(x) \rangle + \alpha u(x) + \epsilon = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

   De même, on voit que la fonction $v^\epsilon := v + \epsilon\phi + C_\epsilon$ est sur-solution de :

$$(\text{PCB})_\epsilon \begin{cases} F(D^2u(x), Du(x), u(x), x) = 0 & \text{pour } x \in \Omega, \\ \langle n(x), Du(x) \rangle + \alpha u(x) - \epsilon = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

6. A partir du théorème de comparaison modèle, expliquer (rapidement) pourquoi $\max_{\overline{\Omega}}\{u^\epsilon - v^\epsilon\} = \max_{\overline{\partial\Omega}}\{u^\epsilon - v^\epsilon\}$

7. On suppose par l'absurde que $M := \max_{\overline{\Omega}}\{u^\epsilon - v^\epsilon\} > 0$; il existe donc, d'après ce qui précéde, un point $z \in \partial\Omega$ tel que $u^\epsilon(z) - v^\epsilon(z) = M > 0$. Considérons alors le maximum pénalisé :

$$M_\delta := \sup_{\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}} \left\{ u^\epsilon(x) - v^\epsilon(y) - \frac{|x-y|^2}{2\delta} + \alpha u(z)\langle n(z), x-y \rangle - |x-z|^4 \right\}.$$

   Notons (x_δ, y_δ) un maximiseur de ce supremum. Montrer alors que quand $\delta \to 0+$:

$$x_\delta \to z \qquad |x_\delta - y_\delta|^2 = o(\delta) \qquad u^\epsilon(x_\delta) \to u^\epsilon(z) \qquad v^\epsilon(y_\delta) \to v^\epsilon(z).$$

8. Notons $\Psi(x,y) = \frac{|x-y|^2}{2\delta} - \alpha u(z)\langle n(z), x-y \rangle + |x-z|^4$. Montrer que pour δ suffisament petit :

$$\forall (D_x\Psi(x_\delta, y_\delta), A) \in \overline{D}^{2,+}u^\epsilon(x_\delta), F(A, D_x\Psi(x_\delta, y_\delta), u^\epsilon(x_\delta), x_\delta) \leq 0,$$
$$\forall (-D_y\Psi(x_\delta, y_\delta), A) \in \overline{D}^{2,-}v^\epsilon(x_\delta), F(A, -D_y\Psi(x_\delta, y_\delta), v^\epsilon(y_\delta), y_\delta) \geq 0.$$

9. Appliquer le lemme d'Ishii à des fonctions bien choisies et conclure.