Chapitre 4 : Continuité en un point

(2 cours)

1 Contenu du cours

1.1 Exemples et idée intuitive

fonction continue si elle n'a pas de "saut" : fonction partie entière, $x \mapsto 2x+1$.

1.2 Définition

Définition 3 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 ssi*
pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_\star^+$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_\star^+$, tel que pour tout $x \in I$, si $|x-x_0| \leq \alpha$ alors $|f(x)-f(x_0)| \leq \varepsilon$.

définition avec quantificateurs.
définition avec l'aide des suites
Preuve de l'équivalence des deux définitions.
Exemples et preuves :
$I = \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$
$I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x$
$I = \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
$I = \mathbb{R}_\star^+$, $x \mapsto \frac{1}{x}$

1.3 Propriétés

(montrées avec les suites) somme de fonctions continues en x produit inverse composition

2 Exercices

2.1 Continuité de la valeur absolue

Montrer que la fonction valeur absolue $|| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en tout point.

2.2 Continuité de fonctions constantes par morceaux

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1.$$

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$ (on raisonnera par l'absurde : on supposera qu'il existe $x_0 < x_1$ tel que $f(x_0) \neq f(x_1)$; on considèrera l'ensemble $A = \{x \in [x_0, +\infty[, \forall y \in [x_0, x], f(y) = f(x_0)\}$. On montrera que A est majoré, et que f ne peut pas être continue au point $\sup A$).

2.3 Continuité et parties entières

Etudier la continuité et représenter graphiquement la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

2.4 Discontinuité en un point

Montrer que la fonction $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f(x) = —x -1— et $f(1) = 3$ est discontinue au point 1.

2.5 Continuité du maximum et du minimum de deux fonctions

i) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = (x + y + |x - y|)/2$ et $\min(x, y) = (x + y - |x - y|)/2$.
ii) Soient $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit $a \in I$, tel que f et g soient continues au point a. Montrer que les fonctions $f \top g\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $f \perp g\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \min(f(x), g(x))$ sont continues en a.

2.6 Continuité d'un produit de fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $a \in I$ et $f\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues en a. Montrer, "avec des ε", que la fonction $fg\ : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ est continue en a.

2.7 Continuité et densité

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et soit $f\ : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en tout point de $[a, b]$ telle que

$$\forall r \in \mathbb{Q} \cap [a, b], f(r) = 0.$$

Montrer que $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.

2.8 Propriétés de continuité des fonctions linéaires

Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant
A) f est continue en 0,
B) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
i) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x - y) = f(x) - f(y)$. En déduire que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.
ii) Calculer $f(0)$.
iii) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.
iv) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$.
v) Montrer, à l'aide de iv) en posant $n = q$ et $x = \frac{1}{q}$, que $\forall q \in \mathbb{N}_\star, f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q} f(1)$.
vi) Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(r) = rf(1)$.
vii) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$.
viii) En déduire que l'ensemble des fonctions réelles satisfaisant A) et B) est exactement l'ensemble des fonctions linéaires.

3 Correction d'exercices

Correction de l'exercice 2.6

Cette solution est basée sur la décomposition, pour tout $x \in I$, $(f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))$.
Puisque f est continue en a, je choisis $\eta_1 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leq \eta_1$, $|f(x) - f(a)| \leq 1$. On a alors $f(a) - 1 \leq f(x) \leq f(a) + 1$. Comme $f(a) + 1 \leq |f(a)| + 1$ et $f(a) - 1 \geq -|f(a)| - 1$, on en déduit $|f(x)| \leq |f(a)| + 1$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Puisque g est continue en a, je choisis $\eta_2 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x - a| \leq \eta_2$, $|g(x) - g(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|}$.

Puisque f est continue en a, je choisis $\eta_3 \in \mathbb{R}_*^+$ tel que, pour tout $x \in I$, si $|x-a| \leq \eta_3$, $|f(x)-f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|}$.
Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$. Soit $x \in I$, tel que $|x-a| \leq \eta$. Posons $A = |f(x)g(x) - f(a)g(a)|$. On a, par inégalité triangulaire,

$$A \leq |f(x)||g(x)-g(a)| + |g(a)||f(x)-f(a)|.$$

Puisque $|x-a| \leq \eta_1$, $|f(x)| \leq |f(a)|+1$. Puisque $|x-a| \leq \eta_2$, $|g(x)-g(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)}$. Puisque $|x-a| \leq \eta_3$, $|f(x)-f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)}$. Donc

$$A \leq (|f(a)|+1)\frac{\varepsilon}{2(1+|f(a)|)} + |g(a)|\frac{\varepsilon}{2(1+|g(a)|)} \leq \varepsilon.$$

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \exists \eta \in \mathbb{R}_*^+, \forall x \in I, |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq \varepsilon,$$

ce qui est la définition de la continuité en a de la fonction fg.

Correction de l'exercice 2.7

Soit $c \in [a,b]$, et soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_*^+$. Puisque f est continue en c, il existe $\eta \in \mathbb{R}_*^+$ tel que $\forall x \in [a,b], |x-c| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(c)| \leq \varepsilon$. Or l'intervalle $[a,b] \cap [c-\eta, c+\eta]$ est de longueur strictement positive, supérieure ou égale à $\min(\eta, b-a)$. Donc il existe au moins un $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b] \cap [c-\eta, c+\eta]$ (il en existe en fait une infinité). On a alors $f(x) = 0$ et $|f(x)-f(c)| \leq \varepsilon$. Donc $|0-f(c)| \leq \varepsilon$, donc $|f(c)| \leq \varepsilon$. On a donc montré que

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, |f(c)| \leq \varepsilon.$$

Donc $f(c) = 0$ (si on avait $f(c) \neq 0$, il suffirait de prendre $\varepsilon = |f(c)|/2$ pour obtenir une contradiction).

Correction de l'exercice 2.8

i) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la propriété B), $f(x-y+y) = f(x-y)+f(y)$ donc $f(x) = f(x-y)+f(y)$, donc $f(x-y) = f(x)-f(y)$.
Soit $z \in \mathbb{R}$. Montrons que f est continue en z. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers z. Alors la suite $(u_n - z)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par continuité de f en 0, on en déduit que $(f(u_n-z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(0)$. Or $f(u_n-z) = f(u_n-z)-f(0)$, donc $(f(u_n-z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n-z) = f(u_n)-f(z)$, on en déduit que $(f(u_n)-f(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(z)$. Cela montre donc que f est continue en z.
ii) On a $f(0+0) = f(0)+f(0) = f(0)$, donc $f(0) = 0$.
iii) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x-x) = f(0) = f(x)+f(-x)$, donc $f(-x) = -f(x)$.
iv) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a bien, au rang $n=0$, $f(0x) = 0 = 0f(x)$. Supposons que la relation soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $f((n+1)x) = f(nx+x) = f(nx)+f(x) = nf(x)+f(x) = (n+1)f(x)$, par propriété B) et par hypothèse de récurrence.
v) Soit $q \in \mathbb{N}_*$. Appliquons iv) à $n = q$ et $x = 1/q$. On obtient $f(q.1/q) = f(1) = qf(1/q)$ donc $f(1/q) = f(1)/q$.
vi) Soit $r \in \mathbb{Q}^+$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}_*$ tel que $r = n/q$. On a alors $f(r) = f(n.1/q) = nf(1/q) = n/qf(1)$, d'après iv) et v). Donc $f(r) = rf(1)$. Soit $r \in \mathbb{Q}$ tel que $r < 0$. Alors $-r \in \mathbb{Q}^+$, donc $f(-r) = (-r)f(1)$. Or $f(-r) = -f(r)$ d'après iii), donc $-f(r) = -rf(1)$. Donc, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = rf(1)$.
vii) On peut appliquer l'exercice ci-dessus à la fonction $g\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)-xf(1)$. On a alors g continue en tout point de $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$, et $\forall r \in \mathbb{Q}$, $g(r) = 0$. Donc $\forall r \in \mathbb{R}$, $g(r) = 0$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$.

viii) Tout fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ donné (fonction linéaire), vérifie les hypothèses de l'énoncé. Réciproquement, la question vii) montre que toutes les fonctions satisfaisant l'énoncé sont de la forme $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \alpha x$. Donc l'ensemble des fonctions satisfaisant l'énoncé est exactement l'ensemble des fonctions linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.